ISSN (print): 2421-6798
ISSN (on line): 2421-7158

Consiglio Nazionale delle Ricerche

IRCrES

ISTITUTO DI RICERCA SULLA CRESCITA ECONOMICA SOSTENIBILE
RESEARCH INSTITUTE ON SUSTAINABLE ECONOMIC GROWTH

Working Paper

Numero 4/2015

Microeconomia in incertezza: un quadro di riferimento per l'analisi dei rischi d'impresa

Franco Varetto

Microeconomia in incertezza: un quadro di riferimento per l'analisi dei rischi d'impresa

[MICROECONOMICS UNDER UNCERTAINTY: A FRAMEWORK FOR THE ANALYSIS OF BUSINESS RISKS]

Franco Varetto

Mail: francoww@tin.it

National Research Council of Italy
Research Institute on Sustainable Economic Growth
CNR-IRCrES, Collegio Carlo Alberto - via Real Collegio, n. 30
10024 Moncalieri (Torino) – ITALY

ABSTRACT: The introduction of risk in the microeconomic theory has some important effects on the behavior of the competitive firms: the level of optimal production under condition of risk is lower than under certainty; the optimal mix of productive input shifts to ones with less uncertainty; vertical integration, diversification and hedging are as many responses for optimal management of risks. The conclusions of the microeconomics under uncertainty depend also from the way the risk is modeled: additive risk is easier to handle than multiplicative risk, and conclusions from that are closer to microeconomics under certainty.

KEYWORDS: Microeconomics, uncertainty, risk, expected utility, hedging

JEL CODES: D01, D21, D24, D41, D81

INDICE

1. INTRODUZIONE

L'analisi dei rischi d'impresa ha assunto un'importanza rilevante per una serie di motivi, tra i quali giova ricordare:

a) l'enorme sviluppo dell'innova-zione finanziaria degli ultimi decenni, con il proliferare di prodotti, non sempre trasparenti e di facile interpretazione, dedicati alla gestione dei rischi;
b) la maggiore attenzione degli amministratori delle imprese alla individuazione dei fattori di rischio, delle loro conseguenze potenziali sulle imprese;
c) l'enfasi sui sistemi di rating interni delle banche per la valutazione del rischio di insolvenza delle imprese, indotta dalla regulation internazionale sui requisiti di capitale delle istituzioni creditizie (regulation nota come Basilea I, II, III ed è già in vista una Basilea IV);
d) l'impatto della grave crisi finanziaria che ha devastato l'economia dei paesi sviluppati a partire dal secondo semestre 2007.

Lo studio dei rischi e delle forme di copertura ha una lunga tradizione nel mondo delle banche e delle imprese finanziarie in genere, ma salvo che per aree ben circoscritte, come le operazioni di copertura dei rischi di tasso, cambio, prezzo delle commodities, e così via, o per particolari categorie di imprese (le petrolifere, ad esempio) il risk management è rimasto un po' ai margini della gestione aziendale: ne fa fede il ritardo con cui gli organigrammi aziendali incorporano la nuova funzione del CRO (chief risk officer) nella struttura organizzativa. In questa sede si adotta come punto di riferimento quello dell'impresa industriale e quale premessa per successivi approfondimenti si prendono in esame i contributi che la microeconomia in condizioni di incertezza ha portato alla teoria economica. In realtà vi è un ampio campo dell'analisi economica che va dallo studio delle decisioni in condizioni di rischio, incertezza ed ignoranza, alle applicazioni della ricerca operativa, alla teoria della finanza, alla microeconomia e si estende all'economia ed alla finanza comportamentale, arricchite dalla verifica sperimentale del comportamento effettivo di investitori, managers, consumatori. Ciascuno di questi specifici angoli di visuale fornisce una propria lettura del concetto di rischio e delle sue conseguenze sull'azione degli agenti economici. L'insieme di questi campi di analisi è troppo vasto per essere considerato in questa sede e si è deciso di adottare la prospettiva della teoria microeconomia perché, pur lavorando su modelli ipersemplificati, essa riesce a fare chiarezza su alcuni aspetti essenziali che riguardano le principali scelte delle imprese industriali. Si inizia con alcuni richiami sulla funzione di utilità e sui criteri di scelta sotto rischio in modo da disporre di una base concettuale di riferimento, da adattare nelle sezioni successive di questo lavoro.

2. ALCUNI RICHIAMI SULLA FUNZIONE DI UTILITA' E SULLE SCELTE IN CONDIZIONI DI RISCHIO

Facendo riferimento alle classiche distinzioni in tema di rischi ed incertezza, la cui sistemazione concettuale può farsi risalire a F. Knight[1], si possono definire le seguenti situazioni che si possono presentare al decisore:

[1] Con il suo classico "Risk, uncertainty and profit" del 1921, ed.Houghton-Mifflin, NY

e) se il decisore non è in grado di individuare le possibili conseguenze che potranno derivare dalla sua scelta, si ha una situazione in condizioni di IGNORANZA; tale situazione non può essere razionalmente formalizzata con un modello di qualche genere in quanto l'azione del decisore è avvolta nel buio quasi totale;
f) se il decisore è in grado di individuare le possibili conseguenze della sua azione, ma non è in grado di derivare o formulare delle valutazioni sulle probabilità del loro verificarsi, si ha una situazione di INCERTEZZA[2];
g) se infine il decisore è anche in grado di formulare delle valutazioni sulla probabilità[3] del verificarsi di ciascuna conseguenza, allora si ha una situazioni di RISCHIO.

Molto spesso, peraltro, è entrato nell'uso comune in economia parlare indifferentemente di rischio ed incertezza come termini intercambiabili, per illustrare situazioni in cui eventi possono avere più di un risultato possibile (ovviamente se solo un risultato è possibile siamo in condizioni di certezza).

Anche in questa sede, per semplicità espositiva, a volte si useranno i due termini come sinonimi.

Il problema decisionale dell'agente economico può essere stilizzato con una tabella che enumera per ciascuna azione (A_j), o strategia, che può essere scelta dal decisore, le possibili conseguenze, sotto forma di stati di natura (S_i), con la quantificazione dei benefici netti (payoff, positivi o negativi che siano) (O_{ji}):

	STATI DI NATURA			
AZIONI:	S_1	S_2	…	S_n
A_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1n}
A_2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2n}
…				
A_m	O_{m1}	O_{m2}	…	O_{mn}

[2] Secondo un'altra impostazione si ha incertezza in presenza di probabilità soggettive e rischio in presenza di probabilità oggettive: in tale approccio la maggior parte dei problemi in economia sarebbe riconducibile a decisioni in condizioni di incertezza, mentre il rischio sarebbe limitato a poche aree di analisi (assicurazioni, lotterie,..). Nella fisica delle particelle invece si hanno i seguenti concetti: l'evento casuale riguarda un oggetto fisico al cui comportamento manca una causa specifica (o non la si è ancora individuata, o si accetta la semplificazione di non individuarla); la statistica studia la frequenza (e le altre caratteristiche) di eventi già avvenuti in passato; la teoria delle probabilità studia i modi (applicando la statistica) per predire eventi futuri; l'incertezza riguarda l'indeterminazione di una misura, ovvero in quale quantità l'esito ex-post di una misura si differenzia da quanto atteso ex-ante.

[3] Se la probabilità è ottenibile da una serie di eventi che si ripetono nel tempo, e quindi eventi per così dire calcolabili, si hanno probabilità oggettive; più spesso in economia si definiscono delle aspettative ex-ante di eventi che possono accadere, ovvero delle probabilità soggettive, rivedibili alla luce di nuove informazioni o del realizzarsi di eventi parziali (aggiustamenti bayesiani), basate sull'esperienza, cioè su competenze accumulate che consentono la formulazione di giudizi.

Se si è in una situazione di rischio, la tabella può essere completata con la riga delle probabilità (P_i) del verificarsi dei singoli stati di natura:

	STATI DI NATURA			
PROBABILITA'	P_1	P_2	…	P_n
AZIONI:	S_1	S_2	…	S_n
A_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1n}
A_2	O_{21}	O_{22}	…	O_{2n}
…				
A_m	O_{m1}	O_{m2}	…	O_{mn}

In condizione di incertezza sono stati proposti vari criteri decisionali, orientati ad individuare la migliore azione che può essere intrapresa dall'agente economico, tenendo conto che non si è in grado di valutare il possibile grado del verificarsi dei diversi stati di natura; tra i diversi criteri si possono ricordare:

a) il minmax privilegia un atteggiamento particolarmente prudenziale: per ciascuna possibile azione si individua il payoff più basso, cioè il minimo al di sotto del quale non è possibile scendere; poi si sceglie l'azione che fornisce il maggiore di questi payoff minimi. Come si vede il minmax tende a rendere minime le perdite rispetto alla situazione più favorevole;
b) il maxmax è il criterio opposto al minmax: si adotta l'azione che fornisce il payoff massimo;
c) il minimo rammarico definisce una strategia di scelta in base alla minimizzazione del rammarico che abbiamo se, adottando una scelta errata, scopriamo che avremmo potuto decidere meglio. Per sviluppare questo criterio occorre calcolare per ciascuna colonna della tabella iniziale (e quindi per ciascuno stato di natura) le differenze tra i singoli payoff delle diverse azioni ed il payoff massimo di colonna: tali differenze rappresentano i rammarichi; in corrispondenza del payoff massimo di colonna il rammarico è nullo, mentre per gli altri casi il rammarico Rji è dato da Oji-maxj(Oij) [per lo stato di natura Si]. L'azione scelta corrisponde alla riga nella quale vi è il minimo dei valori di rammarico.

Nelle scelte in condizioni di rischio l'agente è in grado di tenere conto della probabilità del verificarsi degli eventi possibili e quindi è possibile calcolare il valore atteso di ciascuna strategia:

$$V_j = \sum_i P_i O_{ji}$$

La scelta migliore, in base al criterio del massimo valore atteso, consiste nell'adottare la strategia che fornisce il valore atteso maggiore.

È stato dimostrato peraltro che il criterio del massimo valore atteso non è in grado di modellare sempre correttamente il comportamento degli individui: il ben noto paradosso di San Pietroburgo di Daniel Bernoulli (18° secolo) non è superabile all'interno del criterio del valore atteso.

La soluzione al paradosso è ottenibile ricorrendo ad un criterio più articolato, la cui base venne proposta da Bernoulli stesso, formalizzato matematicamente da Von Neumann e Morgenstern nel 1944[4]: il criterio della massima utilità attesa.

2.1 FUNZIONE DI UTILITA'

La funzione di utilità consente in modo compatto di tradurre i payoff in termini di desiderabilità per il decisore e di rendere possibile un loro ordinamento, tenendo conto della probabilità del loro verificarsi.

Una funzione di utilità $U(O_{ji})$ di Von Neumann-Mortgenstern deve rispettare alcuni assiomi che si basano sull'ipotesi dell'agente razionale; in sintesi:

a) assioma 1 dell'ordinamento completo dei payoff: l'agente è in grado di ordinare i diversi payoff in base alle sue preferenze
b) assioma 2 della completezza e transitività generale: è l'estensione dell'assioma 1 dai payoff alle strategie (per transitività si intende che se A è preferito a B e B è preferito a C, allora A deve essere preferito a C)
c) assioma 3 della continuità delle preferenze: data una strategia che offre un payoff minimo (m) ed uno massimo (M), è sempre possibile trovare una combinazione dei due payoff con opportune probabilità che offrono un payoff atteso di fronte al quale si è indifferenti se confrontato con una somma certa; tale somma è definita equivalente certo della strategia rischiosa
d) assioma 4 della sostituibilità o indipendenza delle alternative irrilevanti
e) assioma 5 della monotonicità o non sazietà
f) assioma 6 della linearità ovvero delle azioni composte: un decisore è indifferente tra una strategia composta ed una semplice che ha payoff finali uguali e stesse probabilità finali; detto in altri termini, il decisore non è influenzato (condizionato, distorto) dal modo con cui gli sono presentate le scelte.

Costruendo la funzione di utilità sulla base di tali assiomi, la scelta del decisore può essere formalizzata calcolando il valore atteso di ciascuna strategia; la decisione ottima consiste nell'adottare la scelta che procura la massima utilità attesa.

Di seguito si richiamano alcuni elementi essenziali di una generica funzione di utilità, che si suppone continua e derivabile e limitata inferiormente e superiormente [5].

Dato un intervallo reale [a,b] la funzione di utilità rappresenta un decisore AVVERSO AL RISCHIO se è concava su quell'intervallo. La U(.) è concava se sull'intervallo in esame, per ogni α (con $0 <= \alpha <= 1$) e per ogni x e y appartenenti all'intervallo si ha:

$$U[\alpha x + (1-\alpha)y] >= \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$$

Ovvero se l'utilità del valore atteso dei payoff di una strategia (o, in generale, di una lotteria) U[E(w)] è maggiore od uguale del valore atteso delle utilità dei payoff E[U(w)].

[4] J.Von Neumann, O.Morgenstern "Theory of games and economic behavior", ed. Princeton University Press, 1944.
[5] Si rammenta che una trasformazione lineare di una funzione di utilità ne produce un'altra equivalente.

Con una funzione concava, ad uguali incrementi di ricchezza corrispondono incrementi decrescenti di utilità.

Nel caso in cui invece la funzione sia lineare,

$U[\alpha x + (1-\alpha)y] = \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$

Il decisore è NEUTRALE AL RISCHIO, mentre è FAVOREVOLE AL RISCHIO se la funzione è convessa, ovvero vale

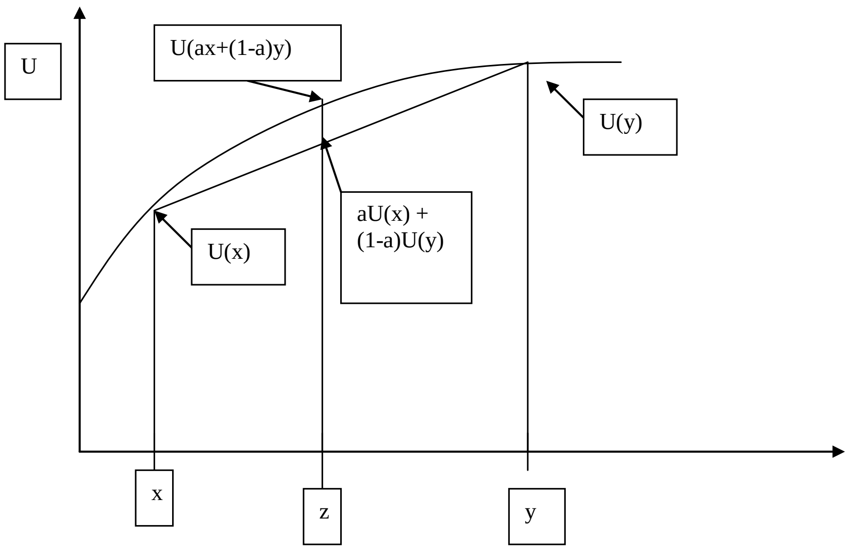
$U[\alpha x + (1-\alpha)y] <= \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$

Occorre sottolineare, ancorché ampiamente noto, che l'avversione al rischio non significa che l'individuo rifiuta il rischio, ma solo che pretende una remunerazione (premio per il rischio) per assumersi il rischio.

In questa sede ci si riferisce prevalentemente al caso generale di avversione al rischio.

Graficamente si ha:

UTILITA' AVVERSA AL RISCHIO



Nella funzione avversa al rischio l'utilità di ricevere una somma con certezza (U(z)) è maggiore dell'utilità attesa di ricevere una somma equivalente in condizioni di rischio (aU(x)+(1-a)U(y)).

In altri termini un individuo avverso al rischio preferisce un investimento certo che genera un rendimento uguale al rendimento atteso di un investimento rischioso.

Il grado di avversione al rischio è connesso con il grado di curvatura della funzione di utilità concava sull'intervallo a-b. Maggiore è la curvatura, più elevata l'avversione al rischio.

Poiché la curvatura ha a che fare con la derivata seconda della funzione, il grado di avversione al rischio può essere definito con riferimento alle derivate della funzione.

Sia w la ricchezza dell'individuo. Perché U(w) sia crescente occorre che U'(w)>0, mentre è strettamente concava rispetto a w se U''(w)<0.

Nel seguito del lavoro si supporrà che la funzione di utilità, ove non specificato diversamente, descriva il caso di avversione al rischio ed abbia U'>0 e U''<0.

Il coefficiente ASSOLUTO di avversione al rischio (Arrow-Pratt) è dato da:

$$APA(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)} = -\frac{dLnU'(w)}{dw}$$

(il denominatore serve a normalizzare il coefficiente in modo da avere un indicatore puro), mentre il suo inverso è definito grado di TOLLERANZA AL RISCHIO:

T(w) = 1/APA(w)

Se si fa riferimento al caso classico di funzione di utilità logaritmica (Ln(w)), evocata dallo stesso Bernoulli per risolvere il paradosso di San Pietroburgo, si ha:

$$U'(w) = 1/w \ >0 \ \text{ e } \ U''(w) = -1/w^2 \ <0$$

ed il grado di avversione assoluta al rischio è uguale ad APA(w)=1/w.

In questo caso l'avversione al rischio diminuisce al crescere della ricchezza: ciò significa che il decisore è maggiormente disposto a correre rischi quanto più è finanziariamente solido.

In generale si distinguono le seguenti funzioni, in base al segno della derivata della avversione assoluta al rischio:

1) CARA = constant absolute risk aversion = avversione costante al rischio rispetto a w (ad esempio: l'esponenziale negativa[6]);
2) DARA = decreasing absolute risk aversion = avversione al rischio decrescente rispetto a w;
3) IARA = increasing absolute risk aversion = avversione crescente al rischio rispetto a w.

La funzione di utilità quadratica è coerente con il criterio media-varianza; tuttavia la funzione quadratica ha un coefficiente di avversione assoluta al rischio crescente rispetto alla ricchezza (maggiore è la ricchezza, minore la disponibilità ad investire in attività rischiose) che è poco realistico[7]; inoltre tale funzione implica una utilità marginale negativa per valori della ricchezza superiore ad una certa soglia.

Il coefficiente di avversione assoluta al rischio è in generale quello a cui si fa più riferimento nella letteratura, ma giova ricordare anche il coefficiente RELATIVO di avversione al rischio (Arrow-Pratt), dato da:

$$APR(w) = -\frac{w * U''(w)}{U'(w)} = -\frac{dLnU'(w)}{dLn(w)}$$

[6] Si consideri la generica $U=-e^{-hw}$: $U'=-(-h)e^{-hw} = he^{-hw}$; $U''=-h^2e^{-hw}$, da cui $-U''/U'=h$

[7] Si consideri la funzione $U=w-hw^2$: si ha $U'=1-2hw$; $U''=-2h$; quindi APA(w)=2h/[1-2hw], il cui valore aumenta al crescere di w. U' diventa negativo per w>1/(2h). Il valore atteso dell'utilità è uguale a $E(U)=E(w)-hE(w^2)$ e poiché la varianza di w può essere scritta come $\sigma^2=E(w^2)-[E(w)]^2$, il valore atteso dell'utilità può essere ricondotto ad un'espressione in termini di media e varianza: $E(U)=E(w)-h[\sigma^2+[E(w)]^2]$.

Il coefficiente relativo non è indipendente dall'unità di misura adottata e può essere visto come l'elasticità dell'utilità marginale di w.

I coefficienti di avversione al rischio assoluto e relativo assumono valori positivi per individui avversi al rischio, nulli per quelli neutrali e negativi per quelli favorevoli al rischio. Essi consentono confronti interpersonali, condizionatamente ai livello di ricchezza considerato.

2.2 EQUIVALENTE CERTO

Nel caso di un individuo avverso al rischio è necessario pagare una certa somma per indurlo ad accettare dei rischi. Per quantificare tale somma si può ricorrere al calcolo dell'equivalente certo. La stessa somma corrisponde anche a quanto l'individuo è disposto a pagare per evitare il rischio. L'equivalente certo (CE) di una ricchezza aleatoria w è pari al livello di ricchezza certa (non rischiosa) che ha la stessa utilità dell'utilità attesa della ricchezza aleatoria w.

$$U(CE) = E[U(w)]$$

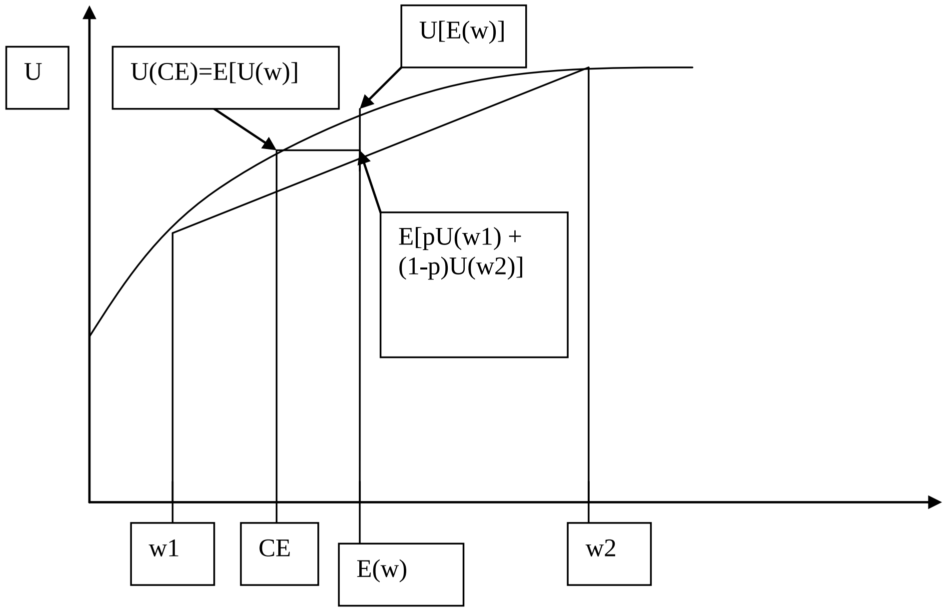
Per una funzione concava, l'equivalente certo è sempre minore od uguale al valore atteso: $CE <= E(w)$

L'equivalente certo è lo stesso per tutte le funzioni di utilità equivalenti.

Nel caso del grafico, $U[CE]=pU(w1)+(1-p)U(w2)=E[U(w)]$ e $E[U(w)]<U[E(w)]$.

La differenza E(w)-CE rappresenta il PREMIO PER IL RISCHIO, ovvero il premio che il decisore richiede per rinunciare ad una ricchezza non aleatoria CE e correre il rischio di ottenere una ricchezza aleatoria pari a E(w), rappresentata convenzionalmente come una lotteria con risultati w1 e w2 con probabilità p ed (1-p)[8].

[8] Ad esempio: sia una lotteria composta da due payoff, il primo con una ricchezza finale di 100 ed il secondo di 250, con probabilità rispettivamente 0.4 e 0.6; il valore atteso della lotteria è 190. Se la funzione di utilità è di tipo logaritmico si ha U(w1)=4.605 [=Ln(100)], U(w2)=5.521 e l'utilità attesa è E[U(w)]=5.155, inferiore all'utilità del valore atteso della lotteria U[E(w)], pari a 5.247. Il valore della ricchezza certa che ha la stessa utilità di 5.155 è 173.286 [=exp(5.155)], da cui deriva un premio per il rischio di 16.714 (=190-173.286).



La relazione E[U(w)]<U[E(w)] che caratterizza la funzione di utilità concava è anche definita diseguaglianza di Jensen.

Si può quindi scrivere:

Equivalente certo = risultato rischioso atteso – premio per il rischio

Maggiore è il premio, tanto più avverso al rischio è l'individuo. Il premio per il rischio è una misura locale del grado di avversione al rischio e muta al variare del grado di curvatura della funzione.

Al limite, se il grado di avversione al rischio tende all'infinito, il criterio di decisione dell'individuo converge verso il minmax, ovvero l'individuo si comporta come in una situazione di incertezza, in cui sceglie l'alternativa meno peggio.

L'individuo che non pretende un premio per addossarsi un rischio ha una funzione di utilità lineare: come tale il suo criterio decisionale può essere rappresentato con la massimizzazione del valore atteso dei payoff (non ponderati con le utilità), ovvero lo stesso criterio visto in precedenza nel caso di decisione in condizione di incertezza.

Tra l'avversione assoluta al rischio ed il premio per il rischio può essere stabilita una relazione approssimata, la cui derivazione è dovuta a J.Pratt (1964):

sia $\tilde{w}$ *una ricchezza aleatoria, con* $\tilde{w} = \overline{w} + \tilde{z}$, *ove* $\overline{w}$ *è la ricchezza attesa*

e $\tilde{z}$ *la componente aleatoria, con* $E(\tilde{z}) = 0$ *e varianza* $= \sigma^2$.

Il valore atteso di $E(\overline{w} + \tilde{z})$ *è quindi* $= \overline{w}$ *e il valore atteso dell'utilità è* $E[U(\overline{w} + \tilde{z})]$.

Tale utilità è anche uguale all'utilità di un reddito certo corrispondente al valore atteso della ricchezza aleatoria corretto per il premio per il rischio, ovvero

$E[U(\tilde{w})] = U(\overline{w} - \pi)$, *in cui* π = *premio per il rischio.*

$$Prendendo\ lo\ sviluppo\ in\ serie\ di\ Taylor\ di\ entrambi\ i\ ter\min i\ si\ ha:$$

$$E[U(\overline{w}+\tilde{z})] \cong E\left[U(\overline{w})+\tilde{z}U'(\overline{w})+\frac{1}{2}U''(\overline{w})\tilde{z}^2+...\right] = U(\overline{w})+\frac{1}{2}U''(\overline{w})\sigma^2,$$

$$essendo\ U'(\hat{w})E(\tilde{z})=0\ per\ E(\tilde{z})=0\ e\ E(\tilde{z}^2)=\sigma^2$$

$$U(\overline{w}-\pi) \cong U(\overline{w})-\pi U'(\overline{w})+...$$

$$Eguagliando\ le\ due\ espressioni\ si\ ha:$$

$$-\pi U'(\overline{w}) = \frac{1}{2}U''(\overline{w})\sigma^2,\ da\ cui\ \pi = -\frac{U''(\overline{w})}{2U'(\overline{w})}\sigma^2 = APA\frac{\sigma^2}{2},\ essendo\ APA = -\frac{U''(\overline{w})}{U'(\overline{w})}$$

$$ovvero\ \pi = \frac{\varphi}{2}\sigma^2,\ definendo\ \varphi\ come\ parametro\ di\ avversione\ assoluta\ al\ rischio$$

$$quindi\ l'equivalente\ certo\ della\ ricchezza\ w\ è\ w_{CE} = E(\tilde{w})-\frac{\varphi}{2}\sigma^2 = E(\tilde{w})-\pi$$

Si osservi che nel caso in cui la funzione di utilità sia caratterizzata da avversione assoluta al rischio costante, φ è costante, mentre se il grado di avversione muta con il livello di ricchezza w, allora φ è una funzione di w e l'espressione di cui sopra va considerata come approssimazione locale, definendo il valore di φ in modo opportuno.

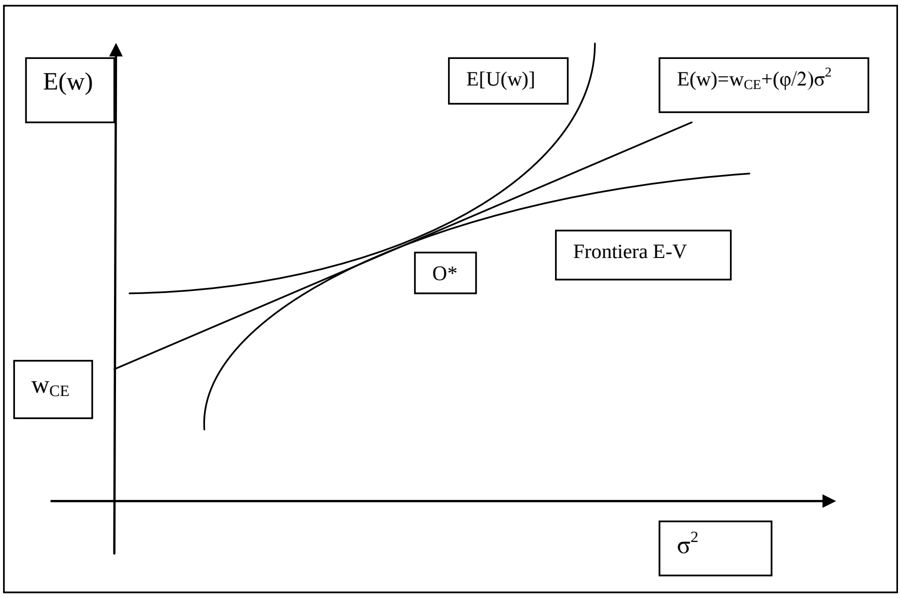
2.3 L'APPROCCIO MEDIA-VARIANZA (E-V)

L'approccio media-varianza, adottato in molte applicazioni finanziarie, a partire dalla ben nota teoria del portafoglio di H.Markowitz, mette a confronto i risultati attesi della scelta rischiosa con la loro volatilità, adottando la varianza come metrica fondamentale di misura della rischiosità dei possibili risultati della decisione.

L'approccio E-V discende da una funzio-ne di utilità di tipo quadratico, ma può essere anche interpretato come una approssimazione locale di schemi più complessi. In sintesi, l'approccio E-V deriva:

a) Da una funzione di utilità quadratica, i cui argomenti sono la media e la varianza dei risultati
b) Da aspettative dell'individuo rappresentabili con una distribuzione normale, che dal punto di vista metodologico è specificata da due parametri: la media e la varianza
c) Da una decisione riguardante la combinazione tra un titolo certo ed uno rischioso, studiata da J.Tobin nel 1958
d) Da una decisione formalizzabile con una combinazione lineare di variabili casuali (di fattori di rischio)

Peraltro, come è stato indicato in precedenza, la funzione di utilità quadratica mal si presta a descrivere il comportamento effettivo degli investitori; inoltre molte distribuzioni empiriche, specie nel campo della finanza, hanno distribuzioni che non sono rappresentabili con la distribuzione normale. Nell'approccio M-V l'insieme delle possibili soluzioni ottimali può essere descritto da una frontiera efficiente nello spazio media-varianza: la soluzione ottima corrisponde al punto di tangenza tra la curva di isoutilità attesa e la frontiera efficiente (punto O* nel grafico); in tale punto la tangenza delle due curve è identica e, tenendo conto dell'approssimazione di Pratt, corrisponde anche alla pendenza φ/2.



La retta con quella pendenza incontra l'asse delle ordinate nel punto W_{CE}, che può essere considerato l'equivalente certo (in quel punto la varianza è nulla) della ricchezza investita. Quindi con una scelta opportuna del grado di avversione assoluta al rischio, la soluzione ottima corrisponde alla ricerca della massimizzazione dell'equivalente certo, con il vincolo che la pendenza della retta che congiunge l'equivalente certo con la frontiera efficiente abbia la stessa pendenza che esiste tra l'isoutilità e la frontiera efficiente; ovvero la soluzione ottima può essere espressa dalla

$$\max\ W_{CE} = E(w) - \frac{\varphi}{2}\sigma^2$$

Ciò significa che massimizzare W_{CE} equivale a massimizzare l'utilità attesa (gli argomenti della funzione di utilità sono il valore atteso e la varianza del risultato della decisione). Spostamenti della frontiera efficiente (curvatura, inclinazione, traslazioni) comportano cambiamenti nella inclinazione della retta tra l'equivalente certo e il punto di ottimo, ovvero implicano mutamenti del parametro di avversione al rischio φ, la cui entità dipende dalle caratteristiche CARA, DARA o IARA della funzione di utilità.

Si può inoltre dimostrare che l'approccio M-V rappresenta un'approssimazione di secondo ordine dello sviluppo in serie di Taylor di tutte le funzioni di utilità con avversione al rischio. Quindi nel caso in cui la decisione in condizione di rischio sia formalizzabile con una combinazione lineare di variabili casuali, il criterio di scelta della massimizzazione dell'utilità attesa può essere ricondotto all'approccio M-V con una appropriata scelta del parametro di rischio φ.

Per tale motivo nel seguito di questo lavoro si ricorrerà prevalentemente all'approccio M-V per dedurre le condizioni di ottimo delle scelte in condizioni di rischio.

******

La funzione di utilità di Von Neumann-Morgenstern ha ricevuto nel corso del tempo numerose critiche e molti teorici hanno lavorato per proporre soluzioni alternative.

Una loro analisi esula dall'ambito di questo lavoro, ma si ritiene utile citare i contributi dell'economia comportamentale, con i notevoli e a volte controintuitivi risultati ottenuti da D.Kahneman e A.Tversky, che hanno messo in luce come gli individui siano avversi al rischio nelle situazioni di guadagno, ma tendano a decidere di correre dei rischi in situazioni di perdita (se ho prospettive di perdita, tanto vale che corra dei rischi e spero che la fortuna volga a mio favore e possa rovesciare situazioni sfavorevoli).

3. L'IMPRESA IN CONCORRENZA

L'impresa in concorrenza perfetta studiata dalla microeconomia in condizioni di certezza è caratterizzata da varie condizioni che ne semplificano l'analisi e ne circoscrivono le soluzioni derivate dall'assunzione di comportamento ottimizzante.

L'impresa della microeconomia in condizioni di certezza:

a) Opera in un mercato perfettamente concorrenziale
b) È price-taker sia sul mercato dei prodotti che sul mercato dei fattori produttivi, nel senso che il suo comportamento non è in grado di influenzare il livello dei prezzi, che viene considerato come dato
c) Utilizza una funzione di produzione caratterizzata da produttività marginale decrescente
d) Prende le sue decisioni in base al criterio della massimizzazione del profitto
e) Il massimo profitto viene raggiunto scegliendo la quantità da produrre e vendere corrispondente al punto di equilibrio in cui il prodotto marginale eguaglia il costo marginale
f) Nel lungo periodo le forze di mercato porteranno il punto di equilibrio al livello minimo della curva del costo medio (di lungo periodo): in altri termini l'impresa spingerà il livello produttivo fino al punto in cui potrà beneficiare di economie di scala, prima che inizino a manifestarsi le diseconomie di scala.

Per sviluppare l'analisi microeconomica in condizioni di incertezza conviene complicare un po' il modello classico ed introdurre le seguenti varianti:

1) L'impresa produce una molteplicità di output (e non un solo prodotto)
2) L'impresa ricorre ad una molteplicità di input
3) L'impresa può accumulare (e ridurre) scorte, in altri termini la quantità prodotta non corrisponde necessariamente a quella venduta
4) Può ricorrere a mercati futures
5) Può ricorrere a funzioni di produzione con diversi gradi di flessibilità
6) L'impresa deve finanziare l'acquisto degli input produttivi
7) La reversibilità delle scelte può non essere possibile, soprattutto per i capitali produttivi ad utilità ripetuta[9]. La rigidità dei fattori produttivi è una delle fonti dei rischi d'impresa.

In condizioni di rischio non si può più assumere la perfetta conoscenza dei prezzi degli input e degli output, né la loro diversa qualità o i risultati del processo produttivo; in incertezza sono conoscibili (o assumibili by judgment) solo le distribuzioni di probabilità di tali elementi.

La presenza di rischi rende più complesso questo quadro: per assumerseli l'impresa in concorrenza perfetta vuole essere remunerata; il rischio può essere assimilato ad un ulteriore componente di costo (sotto forma di premio per rischio) di cui l'impresa deve tenere conto nel determinare il suo punto di ottimo.

[9] La reversibilità di un investimento si basa su due condizioni: deve esistere un mercato secondario dei beni capitali usati e la differenza tra prezzo d'acquisto di un bene nuovo ed il suo prezzo di realizzo sul mercato dell'usato non dovrebbe essere particolarmente elevato, per evitare di scoraggiare la decisione di uscita dall'investimento (decisione di disinvestimento).

I diversi modelli proposti nella letteratura sulla microeconomia in incertezza si differenziano in base alle risposte che le imprese danno a fronte dei rischi a cui sono esposte. Tra tali risposte si possono ricordare[10]:

a) Aggiustamenti dei livelli degli input e degli output
b) Mantenimento di riserve precauzionali di input, liquidità, scorte di output
c) Integrazione verticale
d) Diversificazione orizzontale o geografica
e) Coperture con contratti pluriennali a prezzi e/o quantità prestabiliti, forward, futures e altre forme di hedging
f) Acquisizione di fattori produttivi flessibili
g) Acquisizione di fattori produttivi specializzati, con costi di produzione inferiori
h) Acquisizione di impianti che richiedono un minor fabbisogno di input rischiosi
i) Rinvio di decisioni
j) Assicurazione, …

In questa sede si prendono in considerazione alcune di queste possibili risposte, con l'ottica dell'impresa in concorrenza, nell'ambito di decisioni di breve periodo [monoperiodale] (o effetti di breve periodo di decisioni di lungo termine). Non vengono peraltro esaminate la scelta assicurativa e le implicazioni delle decisioni di struttura finanziaria. Non viene neppure considerato il caso di incertezza esteso al monopolio (o alla concorrenza monopolistica) in quanto i risultati sono meno chiari rispetto al caso di impresa in concorrenza: si vedano le conclusioni di Leland (1972). Sull'analisi multi periodale, sui mercati non perfettamente concorrenziali e sulle implicazioni delle scelte di struttura finanziaria si ritornerà in un successivo lavoro.

4. IMPRESA IN CONCORRENZA: RISCHIO DI PREZZO DELL'OUTPUT

Si prenda in considerazione il comportamento dell'impresa in concorrenza perfetta soggetta al rischio di prezzo del bene o servizio prodotto: per semplicità si può immaginare che la decisione sul volume produttivo debba essere presa prima del momento della vendita del bene; solo in quell'istante il prezzo di vendita diventa noto (si suppone che la quantità prodotta coincida con quella venduta e che l'impresa produca un solo bene). Prima di quel momento l'impresa ha una propria aspettativa sui prezzi possibili, in base ad una distribuzione di probabilità soggettiva, formata sulla base dell'esperienza passata[11].

Il fattore di rischio è il prezzo di vendita, mentre la variabile decisionale è la quantità prodotta. I costi, sia quelli fissi che quelli variabili, sono noti (condizione di certezza) al momento della decisione sul volume produttivo.

Come nel modello di microeconomia in condizioni di certezza si considera un solo periodo, senza decisioni di investimento o disinvestimento; in altri termini l'impresa dispone di capitali

[10] Si confronti anche Robinson-Barry, 1987.

[11] La distribuzione di probabilità dei prezzi sintetizza l'informazione di ciò che l'impresa sa su quanto potrà avvenire in futuro sul mercato: il management individua una serie di prezzi possibili che si potranno realizzare ex-post, insieme alla probabilità che ha ciascuno di questi prezzi di verificarsi (ovvero quanto spesso le rilevazioni di mercato future indicheranno quello specifico prezzo). Ex-post di tutti quei prezzi possibili se ne realizza uno solo ed è come se a posteriori l'intera distribuzione di probabilità si condensasse in un solo punto (prezzo), con probabilità 100%.

fissi produttivi già investiti (capacità produttiva già disponibile); la decisione sul volume produttivo è quindi una decisione di breve periodo.

4.1 MODELLO IN CONDIZIONI DI CERTEZZA

Per avere un punto di riferimento, si inizia dal classico modello in condizioni di certezza con il quale si ottengono i ben noti risultati:

$$\begin{aligned}
&\textit{Sia } \pi \textit{ il profitto, } p \textit{ il prezzo del bene, } q \textit{ la quantità prodotta e venduta,}\\
&c(q) \textit{ la funzione dei costi variabili, con } c(0)=0 \textit{ e } c'(q)>0,\ F \textit{ i costi fissi}\\
&\pi = pq - c(q) - F\\
&\textit{il valore ottimo di } q \textit{ viene trovato massimizzando il profitto;}\\
&\textit{derivando rispetto a } q \textit{ si ha}\\
&\frac{d\pi}{dq} = p - c'(q) = 0, \textit{ da cui}\\
&p = c'(q), \textit{ in cui } c'(q) \textit{ è la derivata del costo variabile totale rispetto a } q\\
&\textit{ovvero: ricavo marginale (che coincide con il prezzo) = costo marginale}\\
&\textit{La condizione di second'ordine vale } c''(q)>0, \textit{ ovvero il costo marginale}\\
&\textit{deve aumentare a tasso crescente.}
\end{aligned}$$

4.2 MODELLO IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA – MAX UTILITA' ATTESA

Si consideri una funzione di utilità avversa al rischio con U'(π)>0 e U''(π)<0.

Il valore atteso dell'utilità dei profitti[12] è pari a $E[U(\tilde{p}q - c(q) - F)]$, in cui p è una variabile casuale, con valore atteso $E(\tilde{p}) = \bar{p}$. La condizione di ottimo del primo ordine può essere ricavata derivando il valore atteso dell'utilità rispetto alla variabile decisionale q:

$$\begin{aligned}
&E[U'(\pi)*(\tilde{p} - c'(q))] = 0\\
&\textit{poichè } U'(\pi)>0, \textit{ l'equazione precedente si annulla per } \tilde{p} = c'(q)\\
&\textit{Si osservi che l'espressione può essere riscritta come:}\\
&E[U'(\pi)*(\tilde{p} - \bar{p} + \bar{p} - c'(q))] = E[U'(\pi)(\bar{p} - c'(q))] + E[U'(\pi)(\tilde{p} - \bar{p})] =\\
&= E[U'(\pi)(\bar{p} - c'(q))] + \operatorname{cov}[U'(\pi), \tilde{p}] = 0\\
&\textit{La condizione di second'ordine vale}\\
&E[U''(\pi)*(\tilde{p} - c'(q))^2 - U'(\pi)*c''(q)] < 0
\end{aligned}$$

Si osservi che poiché U''(π)<0, affinchè la condizione di second'ordine sia verificata non è necessario assumere che c''(q)>0, come nel caso di condizione di certezza.

La covarianza tra U'(π) e p è negativa per funzioni di utilità concave. La soluzione della condizione di primo ordine può essere scritta anche come[13]:

---

[12] L'utilità attesa è scrivibile analiticamente come $E[U(\tilde{\pi})] = \int_0^{\infty} U(\tilde{p}q - c(q) - F) f(\tilde{p}) dp$

$$\bar{p} = c'(q) - \frac{\operatorname{cov}[U'(\pi), \tilde{p}]}{E[U'(\pi)]}$$

in cui il termine di destra rappresenta la somma del costo marginale e del costo aggiuntivo per l'incertezza (la covarianza è negativa per funzioni avverse al rischio e quindi si somma al costo marginale).

Sandmo (1971) ha dimostrato che in incertezza la quantità prodotta è inferiore al livello che si raggiunge in condizioni di certezza. Infatti:

$$\begin{aligned}
&\textit{la condizione di prim'ordine può essere scritta come}\\
&E[U'(\pi) * \tilde{p}] = E[U'(\pi) * c'(q)]\\
&\textit{sottraendo da entrambi i lati } E[U'(\pi) * \bar{p}], \textit{ si ha}\\
&E[U'(\pi) * (\tilde{p} - \bar{p})] = E[U'(\pi) * (c'(q) - \bar{p})]\\
&\textit{Dalla definizione di profitto e di profitto atteso si ha}\\
&\tilde{\pi} = \tilde{p}q - c(q) - F\\
&\bar{\pi} = E(\tilde{\pi}) = \bar{p}q - c(q) - F\\
&E(\tilde{\pi}) - \bar{p}q = -c(q) - F\\
&\tilde{\pi} = E(\tilde{\pi}) - \bar{p}q + \tilde{p}q = E(\tilde{\pi}) + (\tilde{p} - \bar{p})q\\
&\textit{Per } \tilde{p} > \bar{p} \textit{ si ha che } U'(\tilde{\pi}) \le U'[E(\tilde{\pi})]\\
&\textit{e quindi } U'(\tilde{\pi}) * (\tilde{p} - \bar{p}) \le U'[E(\tilde{\pi})] * (\tilde{p} - \bar{p}), \textit{ per qualunque } \tilde{p}\\
&\textit{il valore atteso di entrambi i membri è}\\
&E[U'(\tilde{\pi})(\tilde{p} - \bar{p})] \le U'[E(\tilde{\pi})] * E(\tilde{p} - \bar{p})\\
&\textit{il termine di destra è nullo per definizione (media degli scarti semplici, ovvero } E(\tilde{p}) = \bar{p})\\
&\textit{e quindi il termine di sinistra è negativo, che può essere scritto come}\\
&E[U'(\tilde{\pi}) * (c'(q) - \bar{p})] \le 0, \textit{ che, essendo } U' > 0, \textit{ implica}\\
&c'(q) \le \bar{p}
\end{aligned}$$

Ciò significa che in condizioni di rischio, con imprese avverse al rischio[14], la quantità ottima prodotta e venduta si ha in corrispondenza di un livello del costo marginale inferiore al prezzo: ovvero in condizioni di rischio l'output si colloca ad un livello più basso rispetto al caso di produzione in condizioni di certezza. A parità di condizioni si viene così a creare sul mercato un eccesso di capacità produttiva, tanto maggiore quanto più elevata è l'incertezza che condiziona le scelte delle imprese.

[13] Si veda anche Baron (1970)

[14] Se l'impresa è neutrale al rischio, si può dimostrare che l'output in condizioni di rischio è uguale a quello in condizioni di certezza, essendo $U'(\tilde{\pi})(\tilde{p} - \bar{p}) = U'[E(\tilde{\pi})](\tilde{p} - \bar{p})$

4.3 APPROCCIO M-V

Lo stesso problema può essere affrontato ricorrendo all'approccio media-varianza[15] applicato al profitto (l'insieme efficiente è definito rispetto al valore atteso ed alla varianza del profitto dell'impresa). La soluzione ottima è ottenibile massimizzando l'equivalente certo del profitto, corrispondente alla differenza tra profitto atteso e premio per il rischio.

$Sia\ la\ variabile\ casuale\ prezzo\ \tilde{p}\ scrivibile\ come\ \bar{p}+\varepsilon$

$in\ cui\ E(\varepsilon)=0\ e\ varianza=\sigma_\varepsilon^2\ e\ quindi\ E(\tilde{p})=E(\bar{p}+\varepsilon)=\bar{p}$

$il\ profitto\ (rischioso)\ è\ \tilde{\pi}=(\bar{p}+\varepsilon)q-c(q)-F$

$il\ profitto\ atteso\ è\ E(\tilde{\pi})=\bar{\pi}=\bar{p}q-c(q)-F$

$la\ varianza\ del\ profitto\ è\ pari\ a\ \sigma_\pi^2=E[(\bar{p}+\varepsilon)q-c(q)-F-\bar{p}q+c(q)+F]^2$

$\sigma_\pi^2=q^2\sigma_\varepsilon^2$

$il\ premio\ per\ il\ rischio,\ definendo\ \varphi\ il\ parametro\ di\ avversione\ assoluta\ al\ rischio,\ è$

$$\frac{\varphi}{2}q^2\sigma_\varepsilon^2$$

$$quindi\ l'equivalente\ certo\ del\ profitto\ è\ \pi_{CE}=\bar{p}q-c(q)-F-\frac{\varphi}{2}q^2\sigma_\varepsilon^2$$

$derivando\ rispetto\ a\ q\ si\ ottiene\ la\ soluzione\ ottima\ della\ quantità\ da\ produrre\ e\ vendere:$

$$\frac{d\pi_{CE}}{dq}=\bar{p}-c'(q)-\varphi q\sigma_\varepsilon^2=0$$

$e\ quindi\ la\ condizione\ di\ prim'ordine\ vale\ \bar{p}=c'(q)+\phi q\sigma_\varepsilon^2$

$e\ la\ condizione\ di\ second'ordine\ è\ -c''(q)-\varphi\sigma_\varepsilon^2<0,\ ovvero\ c''(q)+\varphi\sigma_\varepsilon^2>0$

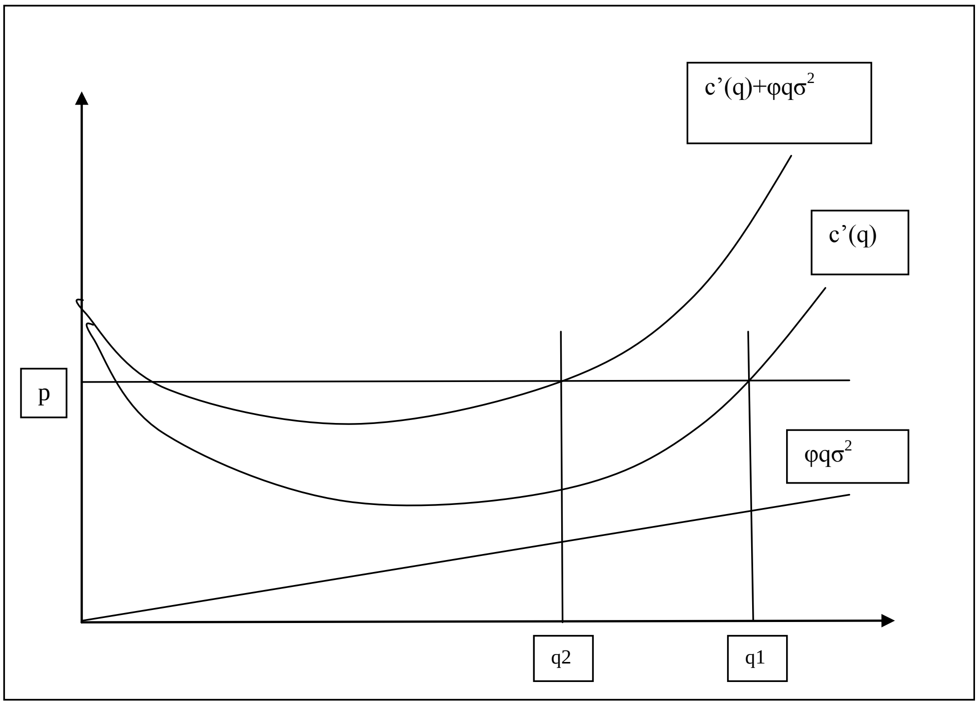
Tenendo conto del premio per il rischio[16], la quantità ottima da produrre è inferiore al volume che l'impresa produce in condizioni di certezza. Il premio per il rischio è considerabile come un ulteriore fattore di costo di cui tenere conto nel confronto con il prezzo atteso[17].

Graficamente si ha:

[15] Si veda anche Hawawini (1978).

[16] Qui il rischio è stato formalizzato con un semplice termine stocastico di variabilità intorno al valore atteso: un aumento di ε genera una aumento della volatilità, senza modificare il valore atteso. Altre formulazioni possono essere $\tilde{p}=\bar{p}\varepsilon,\ con\ E(\varepsilon)=1\ e\ varianza=\sigma_\varepsilon^2$ in cui il rischio è modellato come un fattore moltiplicativo, oppure $\tilde{p}=\bar{p}e^\varepsilon,\ con\ E(\varepsilon)=0$. Combinando fattori additivi e moltiplicativi si può generalizzare il cambiamento del rischio sulla variabile decisionale (prezzo in questo caso), senza imporre E(h)=1 e E(ε)=0: $\tilde{p}_2=\tilde{p}_1h+\varepsilon$, in cui il secondo fattore, ε, genera spostamenti orizzontali della distribuzione dei prezzi, modificando il valore atteso, mentre il primo termine, h, genera distorsioni della distribuzione; scegliendo in modo opportuno il valore di ε si può mantenere il valore atteso di p_2 allo stesso livello di p_1, alterato dal fattore h .

[17] Nella formulazione precedente si è modellato il rischio con la variabile additiva ε; se si utilizzasse una versione con rischio moltiplicativo $\tilde{p}=\bar{p}\varepsilon,\ con\ E(\varepsilon)=1$ la varianza del profitto sarebbe uguale a $E[\bar{p}\varepsilon q-\bar{p}E(\varepsilon)q]^2=\bar{p}^2q^2\sigma_\varepsilon^2$, con conseguenti modifiche nel premio per il rischio.



In condizioni di certezza l'impresa produce q1, mentre in condizioni di rischio produce q2, con una contrazione del livello di output pari a q1-q2.

4.4 IL CASO DELLE FUNZIONI LINEARI

Nel semplice caso di funzioni lineari si ha, in condizioni di certezza:

$\pi = pq - cq - F$

Derivando rispetto a q si ha la condizione $p = c$

che non è mai verificata, essendo in generale $p > c$.

Quindi la produzione ottima si ha per $q = \max$

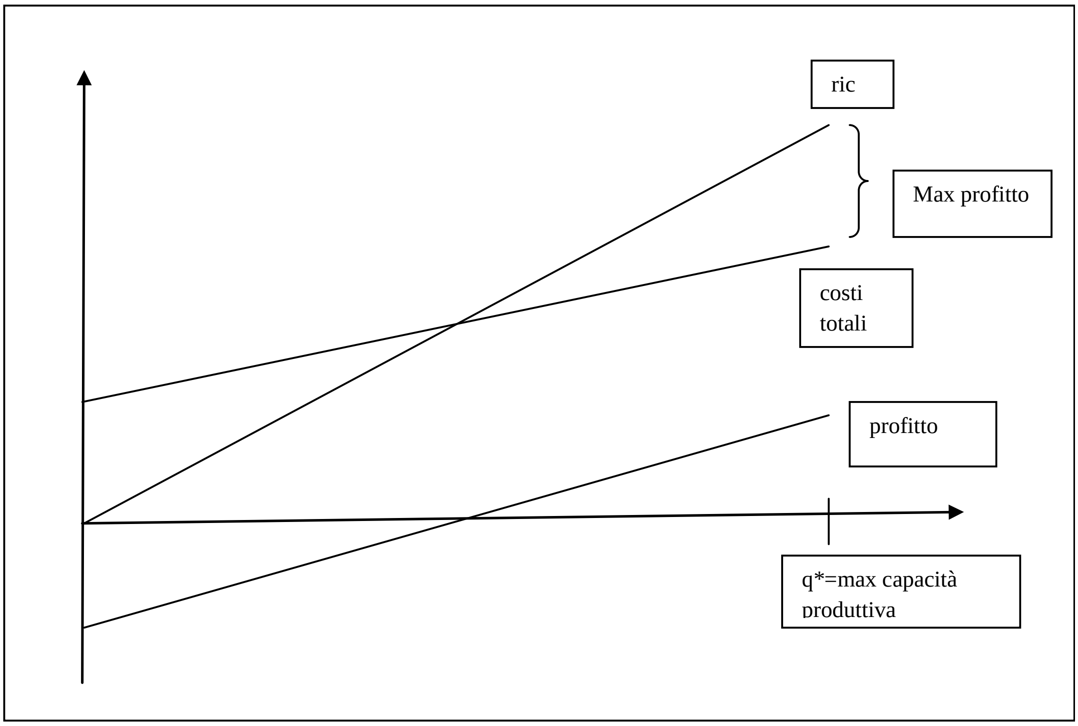
cioè la quantità ottimale corrisponde al livello massimo consentito dalla capacità produttiva.

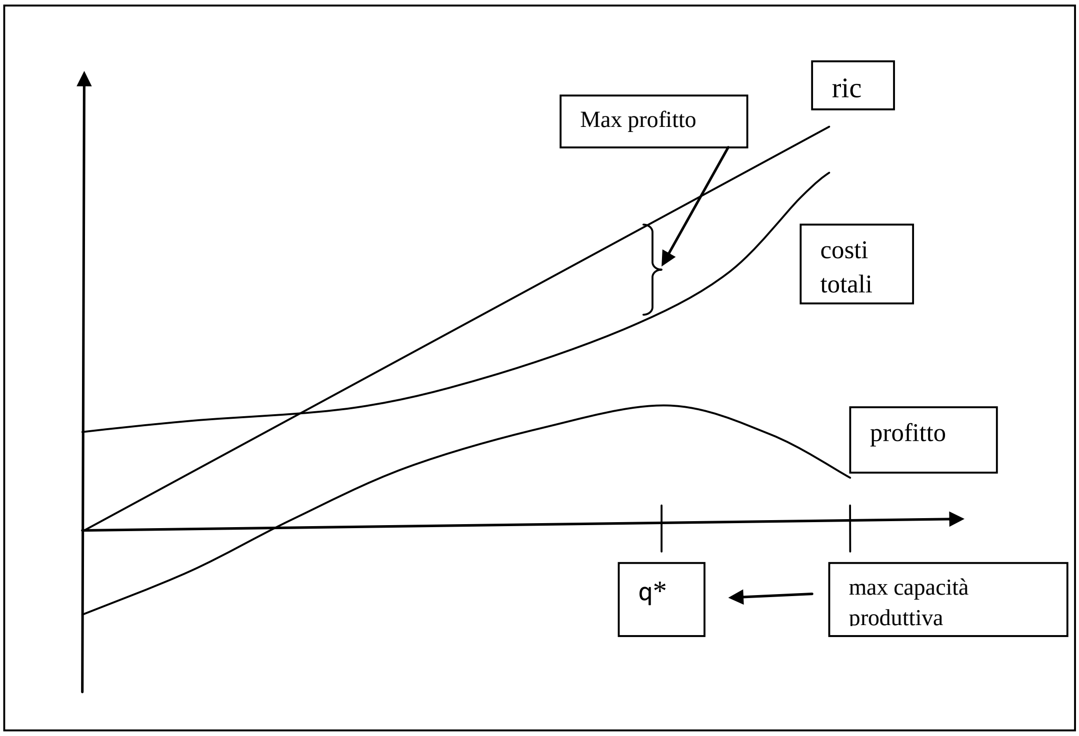
In condizioni di rischio si ha, modificando lievemente le relazioni precedenti:

$$\bar{p} = c + \varphi q \sigma_{\varepsilon}^{2}$$

in cui l'andamento dei costi non è più lineare, ma curvilineo; il valore massimo del profitto (equivalente certo) può non essere più al massimo della capacità produttiva, ma ad un livello inferiore: dipende dall'entità del grado di avversione assoluta al rischio.

Graficamente le situazioni in condizioni di certezza e di rischio si possono rappresentare come segue:


ric
Max profitto
costi
totali
profitto
q*=max capacità
produttiva


ric
Max profitto
costi
totali
profitto
q*
max capacità
produttiva

4.5 IMPATTO DI UNA VARIAZIONE DEI COSTI FISSI

Come si è visto in precedenza, la soluzione del problema di ottimo in condizioni di certezza non lascia spazio ai costi fissi: nella ricerca del punto di massimo profitto l'entità dei costi fissi non gioca alcun ruolo, sono irrilevanti.

In condizioni di rischio invece si può valutare l'effetto di una variazione dei costi fissi derivando la condizione di prim'ordine rispetto a q e rispetto ad F:

$$U''(\tilde{\pi})(\tilde{p}-c'(q))^2 dq - U'(\tilde{\pi})(c''(q)dq + U''(\tilde{\pi})(\tilde{p}-c'(q)(-1)dF = 0$$

$$\textit{da cui}:$$

$$\frac{dq}{dF} = -\frac{U''(\tilde{\pi})(\tilde{p}-c'(q)(-1)}{U''(\tilde{\pi})(\tilde{p}-c'(q))^2 - U'(\tilde{\pi})(c''(q))}$$

Il denominatore coincide con la condizione di second'ordine. Si può dimostrare che per una funzione di utilità con avversione assoluta al rischio decrescente (ipotesi molto ragionevole) il valore di dq/dF è negativo[18], il che implica una diminuzione del volume produttivo in presenza di un incremento del livello dei costi fissi.

In condizione di rischio quindi i costi fissi non sono più irrilevanti, ma concorrono a determinare le scelte dell'impresa anche nelle decisioni di breve periodo.

Con l'approccio M-V si ha, derivando la condizione di prim'ordine rispetto a q ed a F:

$$\left[-c''(q) - \varphi\sigma_\varepsilon^2\right]dq - \frac{\partial\varphi}{\partial F} q\sigma_\varepsilon^2 dF = 0$$

$$\textit{da cui}$$

$$\frac{dq}{dF} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial F} q\sigma_\varepsilon^2}{c''(q) + \varphi\sigma_\varepsilon^2}$$

Il denominatore corrisponde alla condizione di second'ordine (>0) e quindi il segno finale di dq/dF dipende dal comportamento del coefficiente di avversione assoluta al rischio (φ): per funzioni di utilità DARA dφ/dF è positivo e quindi dq/dF è negativo, per funzioni IARA invece dφ/dF è negativo e dq/dF positivo, mentre per funzioni CARA dφ/dF e dq/dF sono entrambi nulli: quest'ultimo è l'unico caso in cui una variazione dei costi fissi non ha effetti sui volumi produttivi, come nel caso di certezza.

Il caso delle funzioni lineari può essere ricondotto all'approccio M-V generale.

5. IMPRESA IN CONCORRENZA: RISCHIO DI COSTO DELL'INPUT

Si supponga ora che il prezzo del bene venduto sia deterministico e conosciuto prima di decidere il livello produttivo e che sia invece stocastico il prezzo dell'input variabile.

[18] Per la dimostrazione si rinvia a Sandmo (1971).

5.1 APPROCCIO M-V

Utilizzando l'approccio M-V e, per semplicità, funzioni lineari per i costi:

$$
\begin{aligned}
&il\ \ profitto\ \ (v.c.)\ \grave{e}\ \tilde{\pi} = pf(x) - \tilde{c}x - F,\ ove\ x = input\ \ e\ \ f(x) = \ funzione\\
&di\ trasformazione\ dell'input\ \ \mathrm{var}iabile\ \ in\ \ output,\ con\ \ f'(x) > 0\ \ e\ \ f''(x) < 0\\
&ove\ \tilde{c} = \bar{c} + \eta,\ con\ \ E(\eta) = 0\ \ e\ \ \mathrm{var}ianza\ = \sigma_\eta^2\\
&la\ \ \mathrm{var}ianza\ \ del\ \ profitto\ \ vale\ E[pf(x) - \tilde{c}x - F - pf(x) + \bar{c}x + F]^2 = x^2\sigma_\eta^2\\
&l'equivalente\ certo\ \ del\ \ profitto\ \ \grave{e}\\
&\pi_{CE} = pf(x) - \bar{c}x - F - \frac{\varphi}{2}x^2\sigma_\eta^2\\
&derivando\ rispetto\ \ ad\ \ x\ \ si\ \ ha\ \ per\ \ la\ \ condizione\ \ di\ \ prim'ordine:\\
&\frac{d\pi_{CE}}{dx} = pf'(x) - \bar{c} - \varphi x\sigma_\eta^2 = 0\\
&ovvero\ pf'(x) = \bar{c} + \varphi x\sigma_\eta^2\\
&mentre\ \ la\ \ condizione\ \ di\ \ \mathrm{sec}ond'ordine\ vale\\
&pf''(x) - \varphi\sigma_\eta^2 < 0,\ ovvero\ pf''(x) < \varphi\sigma_\eta^2,\ che\ \grave{e}\ sempre\ verificata\ \ per\ \ f''(x) < 0
\end{aligned}
$$

La condizione di ottimo riproduce l'eguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale, ma rispetto al caso di certezza qui il costo include l'onere del premio per rischio, la cui entità dipende dall'intensità del rischio sul costo unitario dell'input.

Poiché la funzione del ricavo marginale è la stessa della condizioni di certezza, l'esame del secondo membro della condizioni di prim'ordine mette in luce che in condizioni di rischio la curva del costo marginale è più ripida di quella del caso di certezza: ciò significa che il costo marginale corretto per la remunerazione del rischio incontra il ricavo marginale ad un livello di input (x) inferiore a quello del caso di certezza, determinando di conseguenza (tramite la funzione di trasformazione) un volume produttivo inferiore. Il rischio sui costi conduce ad un minor acquisto di fattori produttivi rischiosi.

Per fare un confronto diretto con il caso del rischio di prezzo, si può riformulare il costo in termini di prodotto e non di input:

$$\textit{il profitto (v.c.) è } \tilde{\pi} = pq - \tilde{c}(q) - F,$$
$$\textit{ove } \tilde{c}(q) = \bar{c}(q) + \eta(q), \textit{ con } E(\eta) = 0 \textit{ e varianza } = \sigma_\eta^2$$
$$\textit{la varianza del profitto vale } E[pq - \tilde{c}(q) - F - pq + \bar{c}(q) + F]^2 = \sigma_c^2(q)$$
$$\textit{in cui la varianza dei costi è funzione di } q$$
$$\textit{l'equivalente certo del profitto è}$$
$$\pi_{CE} = pq - \bar{c}(q) - F - \frac{\varphi}{2}\sigma_c^2(q)$$
$$\textit{derivando rispetto a } q \textit{ si ha per la condizione di prim'ordine:}$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dx} = p - \bar{c}'(q) - \frac{\varphi}{2}\frac{d\sigma_c^2(q)}{dq} = 0$$
$$\textit{ovvero } p = \bar{c}'(q) + \frac{\varphi}{2}\frac{d\sigma_c^2(q)}{dq}$$
$$\textit{mentre la condizione di second'ordine vale}$$
$$-c''(q) - \frac{\varphi}{2}\frac{d^2\sigma_c^2(q)}{dq^2} < 0, \textit{ ovvero } c''(q) + \frac{\varphi}{2}\frac{d^2\sigma_c^2(q)}{dq^2} > 0$$

Quindi le due condizioni di ottimo, entrambe del genere ricavo marginale=costo marginale, sono:

$$\begin{cases} \textit{rischio di prezzo: } \bar{p} = c'(q) + \varphi q \sigma_p^2 \\ \textit{rischio di costo: } p = \bar{c}'(q) + \dfrac{\varphi}{2}\dfrac{d\sigma_c^2}{dq} \end{cases}$$

In entrambi i casi la quantità prodotta in condizioni di incertezza è inferiore a quella in condizioni di certezza, ma la diminuzione dell'ouput può essere diverso nei due casi, dipendendo dalla diversa entità del rischio sul prezzo o sui costi:

$$\textit{se } p = \bar{p} \textit{ e } c'(q) = \bar{c}'(q), \textit{ la differenza dipende interamente}$$
$$\textit{dalla relazione } q\sigma_p^2 \geq\leq \frac{1}{2}\frac{d\sigma_c^2}{dq}$$

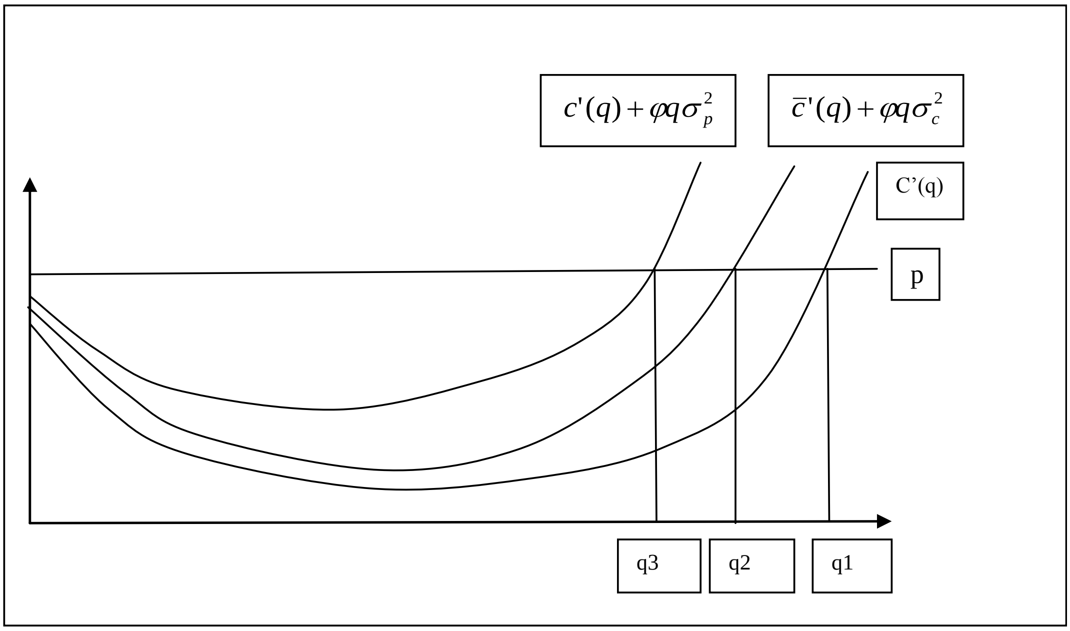
5.2 IL CASO DELLE FUNZIONI LINEARI

Se la funzione di costo è lineare si ha semplicemente:

$$il\ \ profitto\ \ (v.c.)\ è\ \tilde{\pi} = pq - \tilde{c}q - F,$$
$$ove\ \tilde{c}(q) = \bar{c}(q) + \eta(q),\ con\ \ E(\eta) = 0\ \ e\ \ \text{var}\,ianza\ = \sigma_\eta^2$$
$$la\ \ \text{var}\,ianza\ \ del\ \ profitto\ \ vale\ \ E[pq - \tilde{c}q - F - pq + \bar{c}q + F]^2 = q^2\sigma_\eta^2$$
$$l'equivalente\ certo\ \ del\ \ profitto\ \ è$$
$$\pi_{CE} = pq - \bar{c}q - F - \frac{\varphi}{2}q^2\sigma_\eta^2$$
$$derivando\ rispetto\ \ a\ \ q\ \ si\ \ ha\ \ per\ \ la\ \ condizione\ \ di\ \ prim'ordine:$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dx} = p - \bar{c} - \varphi q\sigma_\eta^2 = 0$$
$$ovvero\ \ p = \bar{c} + \varphi q\sigma_\eta^2$$
$$mentre\ \ la\ \ condizione\ \ di\ \ \sec ond'ordine\ \ vale$$
$$-\varphi\sigma_\eta^2 < 0,\ ovvero\ \varphi\sigma_\eta^2 > 0$$

con un risultato simile a quello del rischio di prezzo.

Graficamente si potrebbe avere la seguente situazione:



In questo specifico caso il compenso richiesto per sostenere il rischio di prezzo è maggiore rispetto a quello richiesto per il rischio di costo e quindi l'impresa produce un volume (q3) inferiore a quello previsto per l'incertezza sui costi (q2), entrambi inferiori a quello che verrebbe prodotto in condizioni di certezza (q1).

6. IMPRESA IN CONCORRENZA: RISCHIO DI PREZZO E DI COSTO

Se i rischi riguardano sia il prezzo di vendita che il costo dell'input variabile, come se l'impresa decidesse il volume produttivo senza conoscere esattamente prezzi e costi, ma si basasse sulla sua aspettativa delle loro distribuzioni, si ha:

6.1 APPROCCIO M-V

$$\tilde{\pi} = \tilde{p} f(x) - \tilde{c} x - F$$

la varianza del profitto è pari a $E[\tilde{p} f(x) - \tilde{c} x - F - \bar{p} f(x) + \bar{c} x + F]^2 =$

$$= E[f(x)(\tilde{p} - \bar{p}) - (\tilde{c} - \bar{c})x]^2 = f^2(x)\sigma_p^2 + x^2\sigma_c^2 - 2f(x)xCOV(\tilde{p},\tilde{c})$$

ove la covarianza tra prezzo e costo può essere scritta come $\rho\sigma_p\sigma_c$

in cui ρ *è il coefficiente di correlazione tra prezzo e costo dell'input*

Se i due rischi sono connessi positivamente si ha $\rho > 0$ *e la variaza del profitto risulta in parte attenuata (il termine con la covarianza ha segno meno), se invece i rischi risultano connessi negativamente, la varianza del profitto risulta ampliata rispetto alla somma delle varianze dei due rischi, corrette per* $f^2(x)$ *e* x^2; *se infine i due rischi sono indipendenti la varianza del profitto corrisponde alla somma delle due varianze individuali corrette per i due termini di input.*

L'equivalente certo del profitto è pertanto

$$\pi_{CE} = \bar{p} f(x) - \bar{c} x - F - \frac{\varphi}{2}\left[f^2(x)\sigma_p^2 + x^2\sigma_c^2 - 2f(x)x\rho\sigma_p\sigma_c\right]$$

derivando rispetto ad x *si ottiene*

$$\bar{p} f'(x) - \bar{c} - \varphi\left[f(x)f'(x)\sigma_p^2 + x\sigma_c^2 - (f'(x)x + f(x))\rho\sigma_p\sigma_c\right] = 0$$

e la condizione di second'ordine diventa

$$\bar{p} f''(x) - \varphi\left[(f'(x)f'(x) + f(x)f''(x))\sigma_p^2 + \sigma_c^2 - (f''(x)x + f'(x) + f'(x))\rho\sigma_p\sigma_c\right] < 0$$

La condizioni di ottimo implica l'uguaglianza tra il ricavo marginale atteso ed il costo marginale corretto per la remunerazione dei rischi assunti dall'impresa: il fattore di costo aggiuntivo (costo del rischio) dipende ora non solo dalla somma dei rischi individuali (ponderati) ma anche da come sono tra di loro connessi in termini di segno ed intensità della correlazione: essendo un rischio collegato ai ricavi ed uno collegato ai costi, se la correlazione tra i due è positiva, il rischio complessivo che grava sul profitto risulta (almeno in parte) attenuato.

A parità di condizioni quindi il volume di output in presenza di due rischi risulta ulteriormente ridotto rispetto al caso di certezza: posta di fronte a più rischi contemporaneamente l'impresa che opera in concorrenza perfetta (price-taker sia dal lato dei costi che dei ricavi) reagisce contraendo i volumi produttivi.

6.2 IL CASO DELLE FUNZIONI LINEARI

Nel caso delle funzioni lineari si ha:

$$\tilde{\pi} = \tilde{p}q - \tilde{c}q - F$$

la varianza del profitto è pari a $E[\tilde{p}q - \tilde{c}q - F - \bar{p}q + \bar{c}q + F]^2 =$

$$= E[q(\tilde{p} - \bar{p}) - q(\tilde{c} - \bar{c})x]^2 = q^2\sigma_p^2 + q^2\sigma_c^2 - 2q^2 COV(\tilde{p}, \tilde{c})$$

ove la covarianza tra prezzo e costo può essere scritta come $\rho\sigma_p\sigma_c$

l'equivalente certo del profitto è pertanto

$$\pi_{CE} = \bar{p}q - \bar{c}q - F - \frac{\varphi}{2}\left[q^2\sigma_p^2 + q^2\sigma_c^2 - 2q^2\rho\sigma_p\sigma_c\right]$$

derivando rispetto ad x *si ottiene*

$$\bar{p} - \bar{c} - \varphi q\left[\sigma_p^2 + \sigma_c^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c\right] = 0$$

e la condizione di second'ordine diventa

$$-\varphi\left[\sigma_p^2 + \sigma_c^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c\right] < 0$$

se $\rho \leq 0$ *tale condizione è sempre verificata, se* $\rho > 0$ *e per semplicità lo si pone al valore massimo di* $+1$ *il termine tra parentesi può essere scritto* $(\sigma_p - \sigma_c)^2$ *che sempre positivo e quindi la condizione di secondo ordine è sempre verificata.*

7. IMPRESA IN CONCORRENZA: DUE INPUT, DI CUI UNO RISCHIOSO

Si consideri il caso di un'impresa che opera con una funzione di produzione che viene alimentata da due input variabili, di cui uno è soggetto ad un rischio di costo e l'altro ha un costo noto prima che venga presa la decisione sull'output.

7.1 APPROCCIO M-V

Siano x_1 e x_2 i due input produttivi; il prezzo di x_1 non è noto al momento della decisione produttiva mentre il prezzo del secondo input è certo.

$$\tilde{\pi} = pf(x_1, x_2) - \tilde{c}_1 x_1 - c_2 x_2 - F$$

in cui $f(x_1, x_2)$ *è la funzione di produzione, con*

le consuete ipotesi sulla forma concava, con isoquanti convessi

$$f'_{x1} > 0,\ f'_{x2} > 0,\ f''_{x1} < 0,\ f''_{x2} < 0,\ f''_{x1,x2} < 0,\ f''_{x1} f''_{x2} - f''_{x1x2} f''_{x2x1} > 0$$

in cui i due input hanno un certo grado di sostituibilità.

La varianza del profitto è uguale a $x_1^2 \sigma_{c1}^2$

l'equivalente certo del profitto è pertanto

$$\pi_{CE} = pf(x_1, x_2) - \bar{c}_1 x_1 - c_2 x_2 - F - \frac{\varphi}{2} x_1^2 \sigma_{c1}^2$$

limitandoci alla condizione del prim'ordine e

derivando rispetto a x_1 *e* x_2 *si ha*

$$\frac{\partial \pi_{CE}}{\partial x_1} = pf'_{x1} - \bar{c}_1 - \varphi x_1 \sigma_{c1}^2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_{CE}}{\partial x_2} = pf'_{x2} - c_2 = 0$$

dalla seconda si ottiene $p = \dfrac{c_2}{f'_{x2}}$

che sostituito nella prima determina

$$c_2 \frac{f'_{x1}}{f'_{x2}} = \bar{c}_1 + \varphi x_1 \sigma_{c1}^2, \text{ da cui } \frac{f'_{x1}}{f'_{x2}} = \frac{\bar{c}_1 + \varphi x_1 \sigma_{c1}^2}{c_2}$$

ovvero $\dfrac{f'_{x1} - \varphi x_1 \sigma_{c1}^2}{f'_{x2}} = \dfrac{\bar{c}_1}{c_2}$

Nel caso di certezza (o di neutralità al rischio) $\varphi = 0$

e la relazione diventa $\dfrac{f'_{x1}}{f'_{x2}} = \dfrac{c_1}{c_2}$

Si ottiene la nota soluzione dell'eguaglianza del rapporto tra le produttività marginali dei fattori ed il rapporto tra i costi marginali, ma in condizioni di incertezza i costi includono la correzione per il rischio, ovvero la produttività marginale dei fattori va corretta per il rischio in modo da eguagliarne il rapporto a quello tra i costi marginali.

L'estensione al rischio su entrambi i fattori può essere sviluppato con la tradizionale funzione di produzione basata su lavoro e capitale, considerati entrambi come fattori variabili, reciprocamente sostituibili (in modo da consentire la combinazione di diversi mix lungo l'isoquanto).

In condizioni di certezza si hanno i consueti risultati della microeconomia:

sia $f(L,K)$ *la funzione di produzione,* $L =$ *unità di lavoro,* $K =$ *unità di capitale*

$w =$ *salario unitario,* $r =$ *remunerazione unitaria del capitale,*

con $f_L^{'} > 0,\ f_K^{'} > 0,\ f_{LL}^{''} < 0,\ f_{KK}^{''} < 0,\ f_{LL}^{''} f_{KK}^{''} - f_{LK}^{''} f_{KL}^{''} > 0$

ovvero funzione concava, con produttività marginali decrescenti

ed isoquanti convessi.

il profitto è $\pi = pf(L,K) - wL - rK$

la soluzione ottima del problema di massimizzazione del profitto

(limitandoci alla condizione di prim'ordine) è ottenuta dal sistema

$$\frac{d\pi}{dL} = pf_L^{'} - w = 0$$

$$\frac{d\pi}{dK} = pf_K^{'} - r = 0$$

dalla seconda si ha $p = \dfrac{r}{f_K^{'}}$*, che sostituita nella prima determina*

$$r\frac{f_L^{'}}{f_K^{'}} = w, \text{ ovvero } \frac{f_L^{'}}{f_K^{'}} = \frac{w}{r}$$

Il rapporto tra le produttività marginali dei fattori viene eguagliato al rapporto tra i prezzi dei fattori; il rapporto tra le produttività marginali identifica anche il punto di tangenza dell'isoquanto corrispondente al mix ottimo di fattori per produrre la quantità definita dall'isoquanto; quel mix individua anche la migliore combinazione di fattori dal punto di vista dei costi: con quel mix l'impresa produce al minor costo possibile.

Sia data una disponibilità prefissata di risorse complessiva pari a C

spendibile per acquistare L *e* K:

$$C = wL + rK$$

la retta dell'isocosto, dato C*, è* $L = \dfrac{C}{w} - \dfrac{r}{w}K$

poichè l'isoquanto è definito $dQ = f_L^{'}dL + f_K^{'}dK = 0$*, si ha*

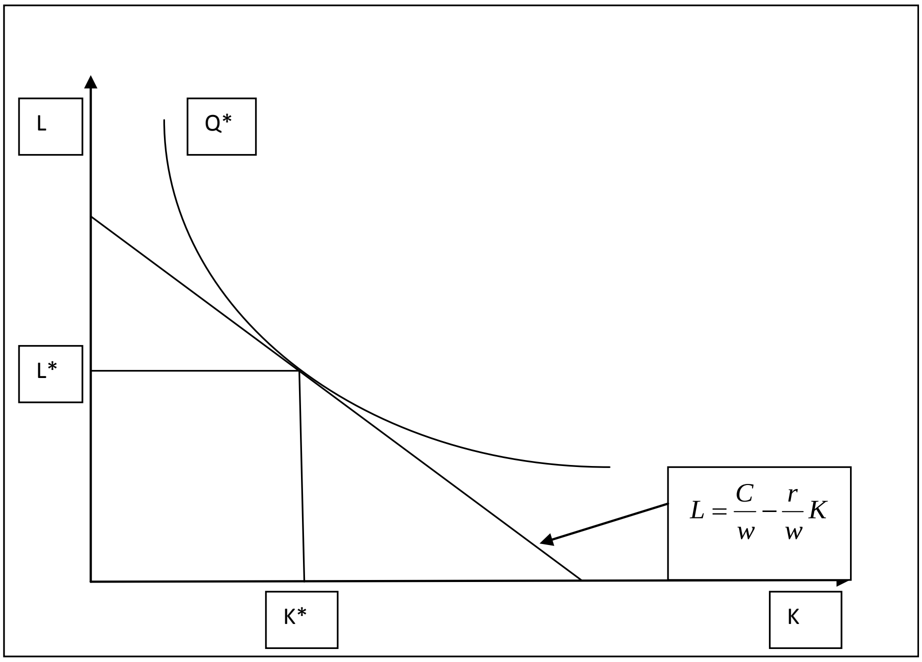
$$\frac{dL}{dK} = -\frac{f_K^{'}}{f_L^{'}} = -\frac{r}{w}$$

Nel punto di ottimo l'isocosto e l'isoquanto hanno la stessa pendenza

e quindi $\dfrac{f_K^{'}}{f_L^{'}} = \dfrac{r}{w}$*; in quel punto il mix ottimo è composto da* L^* *e* K^*

per un volume produttivo pari a $Q^* = f(L^*, K^*)$

Graficamente la soluzione ottima è descrivibile come:



In condizioni di incertezza il prezzo dei fattori può essere indicato con:

$$\tilde{w} = \overline{w} + \eta l$$
$$\tilde{r} = \overline{r} + \eta k$$

e la varianza del profitto diventa $\sigma_\pi^2 = L^2\sigma_L^2 + K^2\sigma_K^2 + 2LK\rho\sigma_L\sigma_K$

L'equivalente certo del profitto vale

$$\pi_{CE} = pf(L,K) - \overline{w}L - \overline{r}K - \frac{\varphi}{2}\sigma_\pi^2$$

limitandoci alle condizioni di primo ordine si ha:

$$\frac{d\pi_{CE}}{dL} = pf_L^{'} - \overline{w} - \varphi(L\sigma_L^2 + K\rho\sigma_L\sigma_K) = 0$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dK} = pf_K^{'} - \overline{r} - \varphi(K\sigma_K^2 + L\rho\sigma_L\sigma_K) = 0$$

da cui $\dfrac{pf_L^{'} - \varphi(L\sigma_L^2 + K\rho\sigma_L\sigma_K)}{pf_K^{'} - \varphi(K\sigma_K^2 + L\rho\sigma_L\sigma_K)} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{r}}$

Il rischio sul prezzo dei fattori altera non solo il livello di output (si vedano le sezioni precedenti), ma anche il mix dei due fattori, in base alla loro rischiosità relativa.

Nel caso in cui $\sigma_L = 0$, *ovvero il fattore lavoro non sia rischioso,*
la proporzione tra i fattori diventa:

$$\frac{\overline{w}}{\overline{r}} = \frac{pf_{L^\wedge}^{'}}{pf_{K^\wedge}^{'} - \varphi K^\wedge\sigma_K^2}$$

Dal confronto tra le due espressioni si vede come

$$\overline{w} = pf'_{L^\wedge} = pf'_L - \varphi(.)$$
$$ovvero\ p(f'_{L^\wedge} - f'_L) = -\varphi(.)$$
$$e\ quindi\ \ f'_{L^\wedge} < f'_L$$
$$mentre\ \ per\ il\ \ denominatore\ deve\ essere\ pf'_{K^\wedge} - \varphi K^\wedge \sigma_K^2 > pf'_K - \varphi(.)$$

Interpretando in senso economico le condizioni del confronto e tenendo conto dell'andamento decrescente delle produttività marginali, la diminuzione dell'incertezza sul fattore lavoro implica che L deve aumentare fino a L^ o K deve diminuire fino a K^ o una combinazione di entrambi gli spostamenti.

Un aumento del rischio quindi implica uno spostamento della domanda dei fattori verso quelli meno rischiosi ed una diminuzione di quelli più rischiosi, con alterazione del loro mix.

A titolo di confronto si riconsideri il caso di rischio sul prezzo dell'output e di certezza sui prezzi degli input:

$$il\ \ profitto\ \ vale\ \tilde{\pi} = \tilde{p}f(L,K) - wL - rK,\ ove\ \tilde{p} = \overline{p} + \varepsilon$$
$$e\ la\ \ varianza\ \ del\ \ profitto\ \ è\ uguale\ \ a\ \ f^2(L,K)\sigma_\varepsilon^2$$
$$l'equivalente\ certo\ \ del\ \ profitto\ \ è\ \pi_{CE} = \overline{p}f(L,K) - wL - rK - \frac{\varphi}{2} f^2(L,K)\sigma_\varepsilon^2$$
$$e\ la\ condizione\ \ di\ \ prim'ordine\ \ diventa$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dL} = \overline{p}f'_L - w - \varphi f'_L f(L,K)\sigma_\varepsilon^2 = 0$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dK} = \overline{p}f'_K - r - \varphi f'_K f(L,K)\sigma_\varepsilon^2 = 0$$
$$da\ cui,\ ricavando\ \ \overline{p}\ \ nella\ \ seconda\ \ e\ \ sostituendolo\ \ nella\ \ prima,\ si\ \ ottiene$$
$$\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r}$$

Come si vede il rischio sul prezzo di vendita riduce l'output complessivo prodotto dall'impresa ma non altera la proporzione con cui i due fattori vengono impiegati nel processo produttivo (in base alle caratteristiche della tecnologia), che resta uguale a quello del caso di certezza.

8. IMPRESA IN CONCORRENZA: RISCHIO SUL PROCESSO PRODUTTIVO

Anche il processo produttivo può dare origine a rischi: si pensi alla differenza tra la qualità ex-post dei prodotti rispetto a quella attesa ex-ante, con conseguenti cali, perdite, rottamazioni,… Lo stesso vale per la quantità fisica dei beni prodotti: fermi macchina, guasti, carenze di scorte degli input, e così via, provocano interruzioni del processo produttivo che possono determinare scostamenti inattesi dei volumi di prodotto.

I rischi sul processo produttivo possono essere modellati inserendo nel modello una funzione di produzione aleatoria:

$$
\begin{aligned}
&sia\ \tilde{f}(L,K) = \bar{f}(L,K) + \upsilon\ la\ funzione\ di\ produzione\ rischiosa\ (con\ rischio\ additivo)\\
&con\ E(\upsilon) = 0\ e\ \mathrm{var}ianza\ \sigma_\upsilon^2\\
&gli\ altri\ parametri\ del\ \mathrm{mod}ello\ sono\ \mathrm{det}er\min istici\\
&Il\ profitto\ aleatorio\ è\ \tilde{\pi} = p\tilde{f}(L,K) - wL - rK\\
&la\ \mathrm{var}ianza\ del\ profitto\ è\ uguale\ a\ E\big[p[\bar{f}(L,K)+\upsilon] - wL - rK - p\bar{f}(L,K) + wL + rK\big]^2 =\\
&= p^2\sigma_\upsilon^2\\
&e\ l'equivalente\ certo\ del\ profitto\ vale\ \pi_{CE} = p\bar{f}(L,K) - wL - rK - \frac{\varphi}{2}p^2\sigma_\upsilon^2\\
&Derivando\ rispetto\ a\ L\ e\ K\ si\ ottiene\ la\ condizione\ del\ prim'ordine:\\
&\frac{d\pi_{CE}}{dL} = p\bar{f}_L^{'} - w = 0\\
&\frac{d\pi_{CE}}{dK} = p\bar{f}_K^{'} - r = 0\\
&da\ cui\ \frac{\bar{f}_L^{'}}{\bar{f}_K^{'}} = \frac{w}{r}
\end{aligned}
$$

Come si vede dalla condizione di ottimo, la domanda dei fattori non dipende dal rischio, come nel caso in condizioni di certezza. Infatti nel sistema di equazioni alle derivate non entra il parametro di rischio.

Se il rischio è invece modellato con parametro moltiplicativo si ha:

$$sia\ \tilde{f}(L,K) = \bar{f}(L,K) * \upsilon\ la\ funzione\ di\ produzione\ rischiosa\ (con\ rischio\ moltiplicativo)$$
$$con\ E(\upsilon) = 1\ e\ varianza\ \sigma_\upsilon^2$$
$$gli\ altri\ parametri\ del\ modello\ sono\ deterministici$$
$$il\ profitto\ aleatorio\ è\ \tilde{\pi} = p\tilde{f}(L,K) - wL - rK$$
$$la\ varianza\ del\ profitto\ è\ uguale\ a\ E\left[p[\bar{f}(L,K) * \upsilon] - wL - rK - p[\bar{f}(L,K) * E(\upsilon)] + wL + rK\right]^2 =$$
$$= p^2 \bar{f}^2(L,K)\sigma_\upsilon^2$$
$$e\ l'equivalente\ certo\ del\ profitto\ vale\ \pi_{CE} = p\bar{f}(L,K) - wL - rK - \frac{\varphi}{2} p^2 \bar{f}^2(L,K)\sigma_\upsilon^2$$
$$derivando\ rispetto\ a\ L\ e\ K\ si\ ottiene\ la\ condizione\ del\ prim'ordine:$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dL} = p\bar{f}_L^{'} - w - \varphi p^2 \bar{f}(L,K)\bar{f}_L^{'}\sigma_\upsilon^2 = 0$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dK} = p\bar{f}_K^{'} - r - \varphi p^2 \bar{f}(L,K)\bar{f}_K^{'}\sigma_\upsilon^2 = 0$$
$$ricavando\ dalla\ seconda\ p = \frac{r + \varphi p^2 \bar{f}(L,K)\bar{f}_K^{'}\sigma_\upsilon^2}{\bar{f}_K^{'}}\ e\ sostituendolo\ nella\ prima\ si\ ha\ ancora$$
$$\frac{\bar{f}_L^{'}}{\bar{f}_K^{'}} = \frac{w}{r}$$

Anche in questo caso la combinazione ottima dei fattori segue il mix di minimo costo come quello in condizioni di certezza, ma, diversamente dal caso di rischio additivo, la domanda dei fattori non è indipendente dal parametro di rischio.

9. IMPRESA IN CONCORRENZA: FLESSIBILITA’ PRODUTTIVA

Finora i modelli presi in considerazione hanno ipotizzato che le decisioni produttive siano prese prima che all’impresa venga rivelato il prezzo di vendita dei beni oppure i prezzi di acquisizione dei fattori. Una volta presa la decisione ex-ante non viene più modificata: è irreversibile. In questa sezione si tiene conto della possibilità che ex-post, dopo che l’impresa ha ricevuto le informazioni rilevanti sulla domanda e sui prezzi, il livello produttivo venga aggiustato; l’aggiustamento non è però senza costi e l’impresa deve affrontare oneri aggiuntivi per variare la produzione rispetto al valore pianificato ex-ante.

Processi produttivi flessibili sono una delle risposte delle imprese all’esistenza di incertezza dovuta alla mancanza di informazioni certe nella fase di predisposizione dei programmi produttivi.

Per modellare la flessibilità produttiva si farà riferimento allo schema proposto da Turnovsky (1973), opportunamente semplificato per limitarne la complessità. Ex-ante all’impresa sono noti i prezzi dell’output e degli input, ma non conosce la esatta quantità di output corrispondente al prezzo di mercato; sulla base delle proprie aspettative quindi pianifica un certo volume produttivo, q. Se ex-post le aspettative sono confermate, q rappresenta anche il volume di output effettivo; in caso contrario l’impresa ricorrendo alla flessibilità dei processi produttivi aggiusta la quantità prodotta per un valore pari a z: ex-post quindi il volume prodotto è q+z; in condizioni di certezza z è nullo e l’impresa pianifica la esatta quantità che verrà assorbita dal mercato (q) al livello di prezzo noto (p). La variabile z è una variabile rischiosa, nota solo ex-post, ha media nulla e può assumere valori negativi (se il volume di domanda ex-post si rivela inferiore al pianificato); l'unico vincolo di positività riguarda la somma q+z che deve essere maggiore o uguale a zero. Il costo di produzione della quantità pianificata è c(q) mentre il costo aggiuntivo per la variazione della quantità prodotta è $c_z(z)$: per tenere conto dell'onere dell'aggiustamento c_z è maggiore di c a parità di volume, ovvero $c_z(q)>c(q)$ valutati entrambi per una quantità pari a q. La funzione dei costi di aggiustamento $c_z(z)$ è convessa con $c_z'>0$ e $c_z''>0$. In ogni caso la flessibilità deve avere un limite massimo e quindi z non può superare una certa soglia (positiva).

Il profitto dell'impresa è uguale a $\tilde{\pi} = p(q+\tilde{z}) - c(q+\tilde{z}) - c_z(\tilde{z}) - F$

con $E(\tilde{z}) = 0$ *e varianza uguale a* σ_z^2.

la varianza del profitto è $\sigma_\pi^2 = E\left[pq + p\tilde{z} - c(q+\tilde{z}) - c_z(\tilde{z}) - F - pq + c(q) + F\right]^2 =$

$= E\left[p\tilde{z} - (c(q+\tilde{z}) - c(q)) - c_z(\tilde{z})\right]^2 = p^2\sigma_z^2 + \sigma_c^2 + \sigma_{cz}^2 - 2p\,\mathrm{cov}(\tilde{z},c) - 2p\,\mathrm{cov}(\tilde{z},c_z) +$
$2\,\mathrm{cov}(c,c_z)$

in cui $c_z(0) = 0$ *e si è preferito non ricondurre le covarianze al prodotto del coefficiente di correlazione e delle devizioni standard perchè*

pur sussistendo relazioni dirette tra $\tilde{z}, c(q+\tilde{z})$ *e* $c_z(\tilde{z})$ *non sono necessariamente lineari essendo c e* c_z *funzioni convesse, con diversi gradi di convessità*

L'equivalente certo del profitto vale

$$\pi_{CE} = pq - c(q) - F - \frac{\varphi}{2}\left[p^2\sigma_z^2 + \sigma_c^2 + \sigma_{cz}^2 - 2p\,\mathrm{cov}(\tilde{z},c) - 2p\,\mathrm{cov}(\tilde{z},c_z) + 2\,\mathrm{cov}(c,c_z)\right]$$

derivando rispetto a q e limitandoci alle sole condizioni del prim'ordine si ottiene la soluzione ottima del piano di produzione:

$$p - c'(q) - \frac{\varphi}{2}\left[\frac{d\sigma_c^2}{dq} - 2p\frac{d\,\mathrm{cov}(\tilde{z},c)}{dq} + 2\frac{d\,\mathrm{cov}(c,c_z)}{dq}\right] = 0$$

La consueta eguaglianza tra prezzo e costo marginale viene integrata da un termine complesso che tiene conto della varianza dei costi di produzione totali e delle connessioni tra il costo di produzione e l'entità dell'aggiustamento produttivo ex-post rispetto alla decisione ex-ante e tra il costo di produzione ed il costo dell'aggiustamento.

Una risposta strategica dell'impresa ai rischi produttivi consiste del dotarsi di processi produttivi che ottimizzino il tradeoff tra costo di produzione dei volumi pianificati e costo dell'aggiustamento produttivo, cioè tra efficienza (costo minimo) e flessibilità operativa (entità degli aggiustamenti possibili e onere di tali aggiustamenti).

Nel caso in cui il processo produttivo non abbia flessibilità, si ha z=0 come nel caso di certezza e la soluzione ottima converge alla tradizionale eguaglianza tra prezzo e costo marginale, senza aggiustamento per il rischio.

10. IMPRESA IN CONCORRENZA: FLESSIBILITA' E SCORTE

La flessibilità produttiva è più facilmente amministrabile ricorrendo ad un'attenta gestione del magazzino, che dovrebbe essere meno onerosa rispetto al ricorso a impianti produttivi flessibili.

Si supponga[19] che invece di modificare il programma di produzione tra ex-ante ed ex-post l'impresa possa decidere di accantonare a magazzino o prelevare da esso una certa quantità di prodotti. Quindi prima che il prezzo dell'output sia conosciuto l'impresa decide l'entità del proprio magazzino pari ad m; dopo che il prezzo di vendita diventa noto l'impresa può produrre una certa quantità q uguale a m, oppure aumentare la giacenza per un ammontare pari a q-m, se q>m, ovvero usare parte (o tutto) del magazzino se q<m. Come nel caso del processo produttivo flessibile, l'aggiustamento della differenza tra vendite e produzione (q-m) comporta degli oneri, che per semplicità, seguendo l'approccio standard della teoria economica, si suppongono modellabili con una funzione quadratica.

L'incertezza riguarda il prezzo dell'output mentre la variabile decisionale è il livello di m: poiché il livello produttivo q è deciso dopo che è diventato noto il prezzo dell'output, q è scelto in modo da massimizzare il profitto; tale valore è ricavato dalla soluzione della funzione del profitto ex-post; una volta trovato il valore ottimo di q viene inserito nella funzione del profitto ex-ante in modo da risolvere il modello per m.

il profitto ex – post vale $\pi = (p+\varepsilon)q - c(q) - c_m(q-m)^2 - F$, *con* $E(\varepsilon) = 0$

in cui c_m *è la costante del costo quadratico dell'aggiustamento tra produzione e magazzini*

Derivando rispetto a q si ricava il valore massimo del profitto ex – post:

$$\frac{d\pi}{dq} = p + \varepsilon - c_q' - c_m(2q - 2m) = 0$$

per semplicità si può ipotizzare che la funzione di costo sia $c(q) = \alpha q^2$

e quindi $c_q' = 2\alpha q$

La condizione di prim'ordine diventa $p + \varepsilon - 2q(\alpha + c_m) + 2mc_m = 0$

da cui ricavando il valore di q si ottiene $q = \dfrac{p + \varepsilon + 2mc_m}{2(\alpha + c_m)} = q(m)$

Sostituendo tale valore nella funzione iniziale si ottiene l'espressione del profitto ex-ante, che quindi dipende solo da m:

$\tilde{\pi} = (p+\varepsilon)q - \alpha q^2 - c_m(q-m)^2 - F =$ *risolvendo il secondo termine quadratico e raccogliendo i termini si ha* $\tilde{\pi} = q[p + \varepsilon + 2c_m m] - (\alpha + c_m)q^2 - c_m m^2 - F$,

da cui sostituendo q si ottiene

$$\tilde{\pi} = \frac{p^2 + \varepsilon^2 + 4c_m^2 m^2 + 2p\varepsilon + 4pc_m m + 4\varepsilon c_m m}{4(\alpha + c_m)} - c_m m^2 - F$$

Isolando i coefficienti della variabile casuale ε *si ha*

$$\tilde{\pi} = \left[\frac{(p + 2c_m m)^2}{4(\alpha + c_m)} - c_m m^2 - F\right] + \left[\frac{p + 2c_m m}{2(\alpha + c_m)}\right]\varepsilon + \left[\frac{1}{4(\alpha + c_m)}\right]\varepsilon^2 = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2$$

[19] Si veda anche Robinson-Barry (1987), Hartman (1976 e Holthausen (1976).

$$La\ varianza\ del\ profitto\ \sigma_\pi^2 = E\left[A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 - A - CE(\varepsilon^2)\right]^2 =$$
$$= B^2\sigma_\varepsilon^2 + C^2\sigma_{\varepsilon^2}^2 + 2BCE(\varepsilon^3),\ in\ cui\ E(\varepsilon^3)\ rappresenta\ l'asimmetria$$
$$mentre\ il\ suo\ valore\ atteso\ è\ \bar{\pi} = A + C\sigma_\varepsilon^2$$
$$L'equivalente\ certo\ del\ profitto\ è\ pertanto:$$
$$\pi_{CE} = A + C\sigma_\varepsilon^2 - \frac{\varphi}{2}\left[B^2\sigma_\varepsilon^2 + C^2\sigma_{\varepsilon^2}^2 + 2CB\,E(\varepsilon^3)\right]$$
$$Derivando\ rispetto\ ad\ m\ si\ ha\ condizione\ del\ prim'ordine$$
$$\frac{d\pi_{CE}}{dm} = \frac{c_m(p - 2\alpha\, m)}{\alpha + c_m} - \varphi\left[\frac{c_m}{\alpha + c_m}\left[\frac{p + 2c_m m}{2(\alpha + c_m)}\sigma_\varepsilon^2 + \frac{E(\varepsilon^3)}{4(\alpha + c_m)}\right]\right] = 0$$
$$= \frac{c_m}{\alpha + c_m}\left\{(p - 2\alpha\, m) - \varphi\left[\frac{p + 2c_m m}{2(\alpha + c_m)}\sigma_\varepsilon^2 + \frac{E(\varepsilon^3)}{4(\alpha + c_m)}\right]\right\} = 0$$
$$L'espressione\ si\ annulla\ se\ si\ azzera\ l'espressione\ tra\ parentesi\ graffe$$
$$Risolvendo\ per\ m\ si\ ha:$$
$$m\left[\frac{2\alpha(\alpha + c_m) + \varphi c_m \sigma_\varepsilon^2}{\alpha + c_m}\right] = \frac{p(\alpha + c_m) - \frac{\varphi}{4}\left[2p\sigma_\varepsilon^2 + E(\varepsilon^3)\right]}{\alpha + c_m},\ da\ cui$$
$$m = \frac{p(\alpha + c_m) - \frac{\varphi}{4}\left[2p\sigma_\varepsilon^2 + E(\varepsilon^3)\right]}{2\alpha(\alpha + c_m) + \varphi c_m \sigma_\varepsilon^2}$$

Tale espressione indica il valore ottimo del magazzino che l'impresa deve decidere ex-ante. Si osservi che la relazione tra livello del magazzino e varianza del prezzo dell'output è negativa[20]: se aumenta il rischio di prezzo, il livello del magazzino ottimale diminuisce; lo stesso si verifica nel caso di un incremento dell'asimmetria del prezzo dell'output. Se la distribuzione del prezzo è simmetrica, si ha $E(\varepsilon^3)=0$ e l'espressione si semplifica in:

$$m = \frac{p(\alpha + c_m) - \frac{\varphi}{2}p\sigma_\varepsilon^2}{2\alpha(\alpha + c_m) + \varphi c_m \sigma_\varepsilon^2}$$

Nel caso invece di un incremento del prezzo dell'output si ha un effetto positivo sul livello di magazzino se $(\alpha + c_m) > \frac{\varphi}{2}\sigma_\varepsilon^2$.

[20] Il segno della varianza è negativo al numeratore e positivo al denominatore e quindi un incremento della varianza riduce il numeratore ed aumenta il denominatore determinando una relazione negativa tra variazione della varianza e variazione di m.

11. IMPRESA IN CONCORRENZA: DIVERSIFICAZIONE PRODUTTIVA

La diversificazione rappresenta un'altra tipica risposta dell'impresa ai rischi di natura operativa (produttivi o commerciali che siano). La diversificazione riguarda la scelta dell'impresa di produrre beni di diverso tipo, ovvero di collocare la propria produzione su mercati geograficamente diversi.

Peraltro occorre sottolineare che se da un lato la diversificazione consente di stabilizzare ricavi e profitti, dall'altro espone l'impresa ad altri tipi di rischi: una eccessiva diversificazione può generare frammentazione produttiva, commerciale ed organizzativa e rendere difficile, se non impossibile, all'impresa ottenere economie di specializzazione, economie di apprendimento ed economie di scala. Tra diversificazione e specializzazione vi è quindi un trade-off tra benefici derivanti dalla riduzione dei rischi ed oneri per mancati risparmi sui costi di produzione (e viceversa: benefici da economie di produzione da confrontare con aumento dei rischi): in altri termini, la diversificazione comporta la rinuncia ad una maggiore redditività, a fronte di una sua maggiore stabilità.

In altri casi, per contro, la diversificazione geografica dei mercati è funzionale al raggiungimento di livelli più elevati di saturazione della capacità produttiva: in questo caso la diversificazione si accompagna al raggiungimento di benefici anche dal punto di vista produttivo e ad un maggiore redditività.

La scelta tra diversificazione e specializzazione è quindi complessa e richiede di essere affrontata su un orizzonte di lungo periodo, che esula dalle finalità di questo lavoro.

In questa sede ci si limiterà a considerare l'effetto della diversificazione sui ricavi e sul profitto dell'impresa in un'ottica di breve termine, ovvero dando per scontata la disponibilità di una capacità produttiva fissa.

L'impresa fabbrica due prodotti in quantità q_1 e q_2 che vende a prezzi soggetti a incertezza $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$, ove $\tilde{p}_1 = \bar{p}_1 + \varepsilon_1$ e $\tilde{p}_2 = \bar{p}_2 + \varepsilon_2$, con $E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_2) = 0$

Il ricavo complessivo è pari a $\tilde{R} = \tilde{p}_1 q_1 + \tilde{p}_2 q_2$, con varianza uguale a:

$$\sigma_R^2 = E[\tilde{p}_1 q_1 + \tilde{p}_2 q_2 - \bar{p}_1 q_1 - \bar{p}_2 q_2]^2 = E[q_1 \tilde{\varepsilon}_1 + q_2 \tilde{\varepsilon}_2]^2 =$$
$$= q_1^2 \sigma_{\varepsilon 1}^2 + q_2^2 \sigma_{\varepsilon 2}^2 + 2 q_1 q_2 \rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2}$$

La capacità produttiva (q) dell'impresa è limitata ma adattabile (nel senso che l'impresa può scegliere di produrre la quantità desiderata di q_1 e q_2 senza dover espandere gli impianti): quindi $q_1 + q_2 = q$

sostituendo nell'espressione della varianza $q_2 = q - q_1$ si ha

$$\sigma_R^2 = q_1^2 \sigma_{\varepsilon 1}^2 + (q - q_1)^2 \sigma_{\varepsilon 2}^2 + 2 q_1 (q - q_1) \rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2} =$$
$$= q_1^2 (\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2}) + q^2 \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2 q q_1 (\sigma_{\varepsilon 2}^2 - \rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2}),$$ *che per $\rho = 1$ e $\sigma_{\varepsilon 1} = \sigma_{\varepsilon 2}$ si semplifica in $\sigma_R^2 = q^2 \sigma_{\varepsilon 1}^2$*

Derivando rispetto a q_1 si può ricavare la combinazione produttiva di minima varianza (ovvero il mix che offre la massima stabilizzazione dei ricavi):

$$\frac{d\sigma_R^r}{dq_1} = 2 q_1 (\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2}) - 2q(\sigma_{\varepsilon_2}^2 - \rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2}) = 0, \text{ da cui}$$

$$q_1 = \frac{q(\sigma_{\varepsilon 2}^2 - \rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2})}{\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho \sigma_{\varepsilon 1} \sigma_{\varepsilon 2}}$$

1) *se la varianza dei due prezzi è identica $(\sigma_{\varepsilon 1} = \sigma_{\varepsilon 2})$ il valore di q_1 di minima varianza si riduce a $q_1 = \dfrac{q \sigma_{\varepsilon 1}^2 (1-\rho)}{2\sigma_{\varepsilon 1}^2 (1-\rho)} = \dfrac{q}{2}$, ovvero il mix produttivo di minima varianza dei ricavi è composto al 50% dai due prodotti*

2) *se le varianze dei prezzi sono diverse ma $\rho = 1$, q_1 di minima varianza vale*

$$q_1 = \frac{q \sigma_{\varepsilon 2} (\sigma_{\varepsilon 2} - \sigma_{\varepsilon 1})}{(\sigma_{\varepsilon 2} - \sigma_{\varepsilon 1})^2} = q \frac{\sigma_{\varepsilon 2}}{\sigma_{\varepsilon 2} - \sigma_{\varepsilon 1}}$$

3) *se $\rho = 1$ e le varianze sono uguali, il valore di q_1 non è definito, il che vuol dire che qualunque mix è accettabile*

Come si vede la volatilità dei ricavi dipende sia dal rischio sui prezzi dei due beni, sia dalla loro correlazione[21]:

[21] Vi è un evidente parallelismo con il ben noto schema di analisi del portafoglio titoli: si veda l'Appendice

$a)$ *se* $\rho = 1$, *la varianza dei ricavi diventa* $\sigma_R^2 = q_1^2(\sigma_{\varepsilon1} - \sigma_{\varepsilon2})^2 + q^2\sigma_{\varepsilon2}^2 - 2qq_1\sigma_{\varepsilon2}(\sigma_{\varepsilon2} - \sigma_{\varepsilon1}) =$
$= q_1^2(\sigma_{\varepsilon1} - \sigma_{\varepsilon2})^2 + q^2\sigma_{\varepsilon2}^2 + 2qq_1\sigma_{\varepsilon2}(\sigma_{\varepsilon1} - \sigma_{\varepsilon2}) = [q_1(\sigma_{\varepsilon1} - \sigma_{\varepsilon2}) + q\sigma_{\varepsilon2}]^2$, *da cui sostituendo a* q *la somma* $q_1 + q_2$, $\sigma_R^2 = [q_1\sigma_{\varepsilon1} + q_2\sigma_{\varepsilon2}]^2$

$b)$ *se* $\rho = -1$, *la varianza diventa* $\sigma_R^2 = q_1^2(\sigma_{\varepsilon1} + \sigma_{\varepsilon2})^2 + q^2\sigma_{\varepsilon2}^2 - 2qq_1\sigma_{\varepsilon2}(\sigma_{\varepsilon2} + \sigma_{\varepsilon1}) =$
$= [q_1(\sigma_{\varepsilon1} + \sigma_{\varepsilon2}) - q\sigma_{\varepsilon2}]^2 = [q_1\sigma_{\varepsilon1} - q_2\sigma_{\varepsilon2}]^2$: *in questo caso la varianza dei ricavi può essere azzerata se l'espressione tra parentesi si annulla, ovvero se* $q_1 = q_2\dfrac{\sigma_{\varepsilon2}}{\sigma_{\varepsilon1}} = q\dfrac{\sigma_{\varepsilon2}}{\sigma_{\varepsilon1} + \sigma_{\varepsilon2}}$

$c)$ *se* $\rho = 0$, *la varianza diventa* $\sigma_R^2 = q_1^2(\sigma_{\varepsilon1}^2 + \sigma_{\varepsilon2}^2) + (q_1 + q_2)\sigma_{\varepsilon2}^2 - 2q_1(q_1 + q_2)\sigma_{\varepsilon2}^2 =$
$= q_1^2\sigma_{\varepsilon1}^2 + q_2^2\sigma_{\varepsilon2}^2$

Le condizioni riportate sopra indicano chiaramente che se tra i due prodotti vi è una perfetta correlazione negativa la varianza dei ricavi complessivi può essere azzerata con una accurata scelta del mix produttivo, con proporzioni rapportante al peso relativo delle deviazioni standard dei due prodotti.

Tenendo separate le decisioni sui due prodotti il profitto è pari a:

$$\tilde{\pi} = \tilde{p}_1 q_1 + \tilde{p}_2 q_2 - c_1(q_1) - c_2(q_2) - F$$

la varianza del profitto è $\sigma_\pi^2 = q_1^2\sigma_{\varepsilon1}^2 + q_2^2\sigma_{\varepsilon2}^2 + 2q_1q_2\rho\sigma_{\varepsilon1}\sigma_{\varepsilon2}$

l'equivalente certo del profitto è

$$\pi_{CE} = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 - c_1(q_1) - c_2(q_2) - F - \frac{\varphi}{2}\sigma_\pi^2$$

derivando rispetto a q_1 *e* q_2 *si ha*

$$\frac{d\pi_{CE}}{dq_1} = \bar{p}_1 - c'(q_1) - \varphi[q_1\sigma_{\varepsilon1}^2 + q_2\rho\sigma_{\varepsilon1}\sigma_{\varepsilon2}] = 0$$

$$\frac{d\pi_{CE}}{dq_2} = \bar{p}_2 - c'(q_2) - \varphi[q_2\sigma_{\varepsilon2}^2 + q_1\rho\sigma_{\varepsilon1}\sigma_{\varepsilon2}] = 0$$

da cui $q_1 = \dfrac{\bar{p}_1 - c'(q_1)}{\varphi\sigma_{\varepsilon1}^2} - \dfrac{q_2\rho\sigma_{\varepsilon2}}{\sigma_{\varepsilon1}}$ *e* $q_2 = \dfrac{\bar{p}_2 - c'(q_2)}{\varphi\sigma_{\varepsilon2}^2} - \dfrac{q_1\rho\sigma_{\varepsilon1}}{\sigma_{\varepsilon2}}$

che per $\rho = 1$ *si ottiene* $q_1 = \dfrac{\bar{p}_1 - c'(q_1)}{\varphi\sigma_{\varepsilon1}^2} - q_2\dfrac{\sigma_{\varepsilon2}}{\sigma_{\varepsilon1}}$ *e* $q_2 = \dfrac{\bar{p}_2 - c'(q_2)}{\varphi\sigma_{\varepsilon2}^2} - q_1\dfrac{\sigma_{\varepsilon1}}{\sigma_{\varepsilon2}}$

per $\rho = -1$ *si ha* $q_1 = \dfrac{\bar{p}_1 - c'(q_1)}{\varphi\sigma_{\varepsilon1}^2} + q_2\dfrac{\sigma_{\varepsilon2}}{\sigma_{\varepsilon1}}$ *e* $q_2 = \dfrac{\bar{p}_2 - c'(q_2)}{\varphi\sigma_{\varepsilon2}^2} + q_1\dfrac{\sigma_{\varepsilon1}}{\sigma_{\varepsilon2}}$

per $\rho = 0$ *si ha* $q_1 = \dfrac{\bar{p}_1 - c'(q_1)}{\varphi\sigma_{\varepsilon1}^2}$ *e* $q_2 = \dfrac{\bar{p}_2 - c'(q_2)}{\varphi\sigma_{\varepsilon2}^2}$

Come si vede le quantità ottime da produrre dei due beni sono collegate tra loro dall'intensità della correlazione tra le volatilità dei rispettivi prezzi. Solo nel caso di indipendenza (ρ=0) le quantità dipendono solo dai rispettivi rapporti tra le differenze tra i prezzi ed i costi marginali e le correzioni per rischi.

Nel caso in cui l'impresa invece decida di produrre comunque la quantità fissa complessiva pari a q, mantenendo la scelta dell'allocazione della capacità produttiva tra q_1 e q_2 il profitto è pari a:

$$\tilde{\pi} = \tilde{p}_1 q_1 + \tilde{p}_2 (q - q_1) - c(q) - F$$

$$la\ varianza\ del\ profitto\ è\ \sigma_\pi^2 = E[q_1(\tilde{p}_1 - \bar{p}_1) + (q - q_1)(\tilde{p}_2 - \bar{p}_2)]^2 =$$

$$= q_1^2[\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2}] + q^2\sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2qq_1[\sigma_{\varepsilon 2}^2 - \rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2}]$$

$$l'equivalente\ certo\ del\ profitto\ è$$

$$\pi_{CE} = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 (q - q_1) - c(q) - F - \frac{\varphi}{2}\sigma_\pi^2$$

$$derivando\ rispetto\ a\ q_1\ si\ ha$$

$$\frac{d\pi_{CE}}{dq_1} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \varphi[q_1(\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2}) - 2q(\sigma_{\varepsilon 2}^2 - \rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2})] = 0$$

$$da\ cui\ q_1 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2 + 2\varphi q(\sigma_{\varepsilon 2}^2 - \rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2})}{\varphi(\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2})},\ che\ si\ semplifica\ come\ segue$$

$$se\ \rho = 1,\ q_1 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2 + 2\varphi q(\sigma_{\varepsilon 2}^2 - \sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2})}{\varphi(\sigma_{\varepsilon 1} - \sigma_{\varepsilon 2})^2}$$

$$se\ \rho = -1,\ q_1 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2 + 2\varphi q(\sigma_{\varepsilon 2}^2 + \sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2})}{\varphi(\sigma_{\varepsilon 1} + \sigma_{\varepsilon 2})^2}$$

$$se\ \rho = 0,\ q_1 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2 + 2\varphi q\sigma_{\varepsilon 2}^2}{\varphi(\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2)}$$

In questa versione, qualunque sia l'entità della correlazione c'è una dipendenza decisionale tra q_1 e q_2: anche nel caso di correlazione nulla infatti sia il prezzo atteso che la varianza del secondo prodotto rilevano ai fini della determinazione della quantità ottima di q_1.

Derivando la condizione di prim'ordine rispetto a φ si può valutare l'effetto di un incremento del grado di avversione al rischio su q_1:

$$\frac{dq_1}{d\varphi} = -\frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\varphi^2(\sigma_{\varepsilon 1}^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2 - 2\rho\sigma_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon 2})},\ che\ è \begin{cases} < 0\ per\ \bar{p}_1 > \bar{p}_2 \\ > 0\ per\ \bar{p}_1 < \bar{p}_2 \\ = 0\ per\ \bar{p}_1 = \bar{p}_2 \end{cases}$$

12. IMPRESA IN CONCORRENZA: INTEGRAZIONE VERTICALE

Anche l'integrazione verticale può rappresentare una delle risposte delle imprese ai rischi aziendali. L'integrazione può riguardare sia l'estensione a valle sia a monte dei processi: l'integrazione a valle riguarda l'acquisizione di aziende produttive o/e commerciali che utilizzano i prodotti dell'impresa come input per le loro operazioni, oppure che semplicemente li commercializzano su mercati di sbocco non attualmente serviti direttamente dall'impresa. L'integrazione a monte riguarda invece l'acquisizione di aziende che forniscono input produttivi all'impresa. In questa sede si fa riferimento a quest'ultimo caso, trascurando invece l'analisi dell'integrazione a valle.

L'integrazione verticale può rappresentare una soluzione per affrontare i rischi di prezzo o/e di disponibilità dei rifornimenti di input produttivi, internalizzando i processi dei fornitori e controllando direttamente le fonti di materie prime, materiali e componenti. Ad esempio un'impresa alimentare produttrice di dolciumi o di bevande può trovare conveniente assicurasi il controllo di piantagioni di cioccolato o di caffè per sottrarsi alle oscillazioni dei prezzi di mercato o gestire direttamente la variabilità dei raccolti delle commodities grezze. Va sottolineato peraltro che l'integrazione a monte può irrigidire i processi aziendali, limitando le future possibilità di cambiare produttore o diversificare le forniture.

Nella decisione di integrazione verticale a monte l'obiettivo di gestione dei rischi va ad aggiungersi alla tradizionale alternativa di make-or-buy e consente di arricchire lo schema della scelta economica in oggetto.

L'impresa produce la quantità q che richiede un input produttivo pari a y che può essere acquistato all'esterno al costo c_e o prodotto internamente al costo c_i. Oltre ai costi dell'input l'impresa sostiene costi di trasformazione per c(q) e costi fissi F; l'output è venduto al prezzo p. L'incertezza riguarda il prezzo di acquisto dell'input c_e. L'impresa può decidere di produrre internamente una quantità y^ riducendo di pari ammontare l'acquisto esterno di y [con 0<= y^ <=y].

$$\textit{Il profitto è pari a } \tilde{\pi} = pq - c(q) - \tilde{c}_e(y-\hat{y}) - c_i\hat{y} - F$$

$$\textit{la cui varianza è } \sigma_\pi^2 = (y-\hat{y})^2\sigma_{ce}^2$$

$$\textit{L'equivalente certo del profitto è } \pi_{CE} = pq - c(q) - \bar{c}_e(y-\hat{y}) - c_i\hat{y} - F - \frac{\varphi}{2}(y-\hat{y})^2\sigma_{ce}^2$$

$$\textit{Derivando rispetto a } \hat{y} \textit{ per la condizione di prim'ordine si ha}$$

$$\frac{d\pi_{CE}}{d\hat{y}} = \bar{c}_{ce} - c_i - \varphi(-1)(y-\hat{y})\sigma_{ce}^2 = 0 = \bar{c}_{ce} - c_i + \varphi y\sigma_{ce}^2 - \varphi\hat{y}\sigma_{ce}^2$$

$$\textit{da cui } \hat{y} = \frac{\bar{c}_{ce} - c_i}{\varphi\sigma_{ce}^2} + y$$

$$\textit{con il vincolo che } \hat{y} \textit{ sia positivo o nullo, ma inferiore a } y.$$

Come si vede è sufficiente che c_e sia superiore a c_i perché il primo termine del secondo membro sia positivo e y^ si collochi al livello massimo y. L'entità dell'incertezza (misurata dalla varianza) ha l'effetto di ridurre la convenienza all'integrazione verticale in quanto rende maggiormente dubbia l'entità della differenza tra costi esterni e costi interni e quindi meno definita la decisione.

13. IMPRESA IN CONCORRENZA: HEDGING

Per alcune categorie di beni, soprattutto commodities, sono disponibili mercati futures con cui le imprese possono gestire il rischio di prezzo dei propri beni, sottoscrivendo contratti con consegna futura ad un prezzo prestabilito oggi. Si osservi che operazioni di hedging con contratti futures (o forward, se si tratta di contratti fuori borsa) predeterminano il prezzo di vendita, ma non eliminano il rischio riguardante la diversa dinamica tra il prezzo a termine e il prezzo spot alla data di scadenza del contratto futures. In questa sede si adotta un approccio semplificato e si trascura questo aspetto.

L'impresa può vendere la sua produzione q al prezzo spot $(\tilde{p})$ *al momento della consegna del bene oppure venderla con un contratto futures al prezzo prefissato* $\hat{p}$. *La parte della produzione venduta a termine è pari ad* h:

se $h < q$ *l'impresa ha assunto una posizione parzialmente coperta*

se $h = q$ *l'impresa si è coperta totalmente*

se $h > q$ *l'impresa ha assunto una posizione speculativa*

Il profitto, ignorando l'effetto del trascorrere del tempo, è pari a

$$\tilde{\pi} = \tilde{p}(q-h) + \hat{p}h - c(q) - F$$

con varianza pari a $\sigma_\pi^2 = (q-h)^2\sigma_\varepsilon^2$, *essendo* $\tilde{p} = \overline{p} + \varepsilon$

L'equivalente certo del profitto vale $\pi_{CE} = \overline{p}(q-h) + \hat{p}h - c(q) - F - \frac{\varphi}{2}\left[(q-h)^2\sigma_\varepsilon^2\right]$

Derivando rispetto ad h, per la condizione di prim'ordine si ha

$$\frac{d\pi_{CE}}{dh} = -\overline{p} + \hat{p} - \varphi(-1)(q-h)\sigma_\varepsilon^2 = 0 = -\overline{p} + \hat{p} + \varphi q\sigma_\varepsilon^2 - \varphi h\sigma_\varepsilon^2 =$$

da cui $h = q - \dfrac{\overline{p} - \hat{p}}{\varphi\sigma_\varepsilon^2}$

Nel caso in cui il prezzo spot atteso sia uguale al prezzo future si ha h=q, ovvero l'intera produzione viene con coperta contratti di vendita a termine. Se il prezzo spot è maggiore del prezzo a termine si ha q>h, ovvero l'impresa copre con futures una parte della produzione e vende il residuo sul mercato spot ad un prezzo incerto; in tal caso tanto maggiori sono l'influenza del grado di avversione al rischio e l'entità di quest'ultimo (misurata dalla varianza) tanto più elevata è la quantità della produzione venduta a termine. Se il prezzo spot è inferiore al prezzo a termine, h>q e l'impresa assume una posizione speculativa.

Se oltre alla quantità h si considera anche q come variabile decisionale, cioè l'impresa decide quanto produrre e quanto vendere a termine, si ha:

derivando anche rispetto a q :

$$\frac{d\pi_{CE}}{dq} = \overline{p} - c^{'}(q) - \varphi(q-h)\sigma_{\varepsilon}^{2} = 0 = \overline{p} - c^{'}(q) - \varphi q\sigma_{\varepsilon}^{2} + \varphi h\sigma_{\varepsilon}^{2} =$$

$$q = \frac{\overline{p} - c^{'}(q) + \varphi h\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\varphi\sigma_{\varepsilon}^{2}}$$

sostituendo il valore di q nella condizione di ottimo per h si ha

$$-\overline{p} + \hat{p} + \varphi\sigma_{\varepsilon}^{2}\frac{\overline{p} - c^{'}(q) + \varphi h\sigma_{\varepsilon}^{2}}{\varphi\sigma_{\varepsilon}^{2}} - \varphi h\sigma_{\varepsilon}^{2} = 0, \text{ da cui}$$

$$\hat{p} = c^{'}(q)$$

La condizione di ottimo nel caso in cui l’impresa decida sia la quantità da produrre sia l’entità dell’operazione di futures hedging si riduce all’eguaglianza del prezzo futures con il costo marginale di produzione, ovvero alla consueta relazione della microeconomia in condizioni di certezza, essendo sia il prezzo future che il costo marginale non soggetti ad incertezza: in altri termini, nella soluzione entra solo il prezzo del contratto future perché con l’operazione di hedging viene sterilizzato il rischio di prezzo e l’impresa agisce come se fosse immersa in un ambiente privo di incertezza.

Se oltre al prezzo spot vi è incertezza anche sulla quantità prodotta, ovvero $\tilde{q} = \overline{q} + \upsilon$, *si ha*

$$\tilde{\pi} = (\overline{p} + \varepsilon)(\overline{q} + \upsilon - h) + \hat{p}h - c\overline{q} - c\upsilon - F,$$

in cui per semplicità i costi variabili unitari sono costanti

La varianza vale $\sigma_{\pi}^{2} = E\left[\overline{q}\varepsilon + \overline{p}\upsilon + \varepsilon\upsilon - h\varepsilon - c\upsilon\right]^{2} = \overline{q}^{2}\sigma_{\varepsilon}^{2} + \overline{p}^{2}\sigma_{\upsilon}^{2} + E(\varepsilon^{2}\upsilon^{2}) + h^{2}\sigma_{\varepsilon}^{2} + c^{2}\sigma_{\upsilon}^{2} +$

$2\overline{q}\overline{p}\operatorname{cov}(\varepsilon,\upsilon) + 2\overline{q}E(\varepsilon^{2}\upsilon) - 2\overline{q}h\sigma_{\varepsilon}^{2} - 2\overline{q}c\operatorname{cov}(\varepsilon,\upsilon) + 2\overline{p}E(\upsilon^{2}\varepsilon) - 2\overline{p}h\operatorname{cov}(\upsilon,\varepsilon) - 2\overline{p}c\sigma_{\upsilon}^{2} -$

$-2hE(\varepsilon^{2}\upsilon) - 2cE(\varepsilon\upsilon^{2}) + 2hc\operatorname{cov}(\varepsilon,\upsilon)$, *in cui si ipotizza che le covarianze tra* ε *e* υ *siano nulle*

L'equivalente certo del profitto è pertanto $\pi_{CE} = \overline{p}(\overline{q} - h) + \hat{p}h - c\overline{q} - F - \frac{\varphi}{2}\sigma_{\pi}^{2}$

Derivando rispetto ad h si ha :

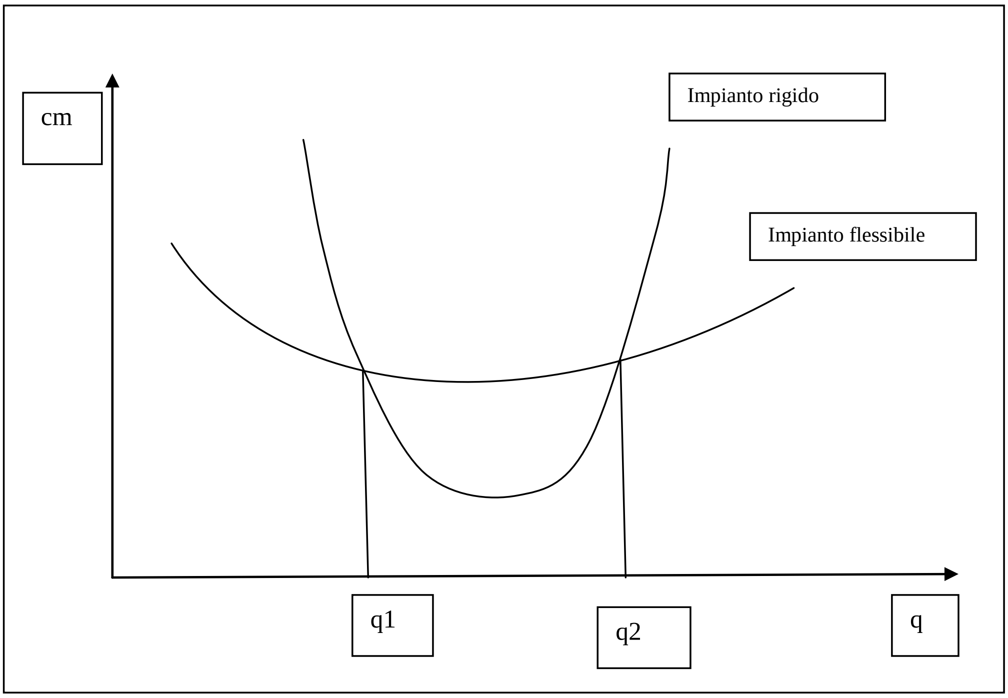
$$\frac{d\pi_{CE}}{dh} = -\overline{p} + \hat{p} - \varphi\left[h\sigma_{\varepsilon}^{2} - \overline{q}\sigma_{\varepsilon}^{2} - E(\varepsilon^{2}\upsilon)\right] = 0, \text{ da cui } h = q + \frac{E(\varepsilon^{2}\upsilon)}{\varphi\sigma_{\varepsilon}^{2}} - \frac{\overline{p} - \hat{p}}{\varphi\sigma_{\varepsilon}^{2}}$$

Come si vede la condizione del prim’ordine è simile a quella ottenuta nel caso di quantità produttiva deterministica: in presenza di quantità stocastica l’entità protetta con contratti futures è influenzata da un termine che incorpora l’interazione tra il rischio di prezzo ed il rischio sul volume produttivo.

14. IMPRESA IN CONCORRENZA: PROCESSI PRODUTTIVI FLESSIBILI

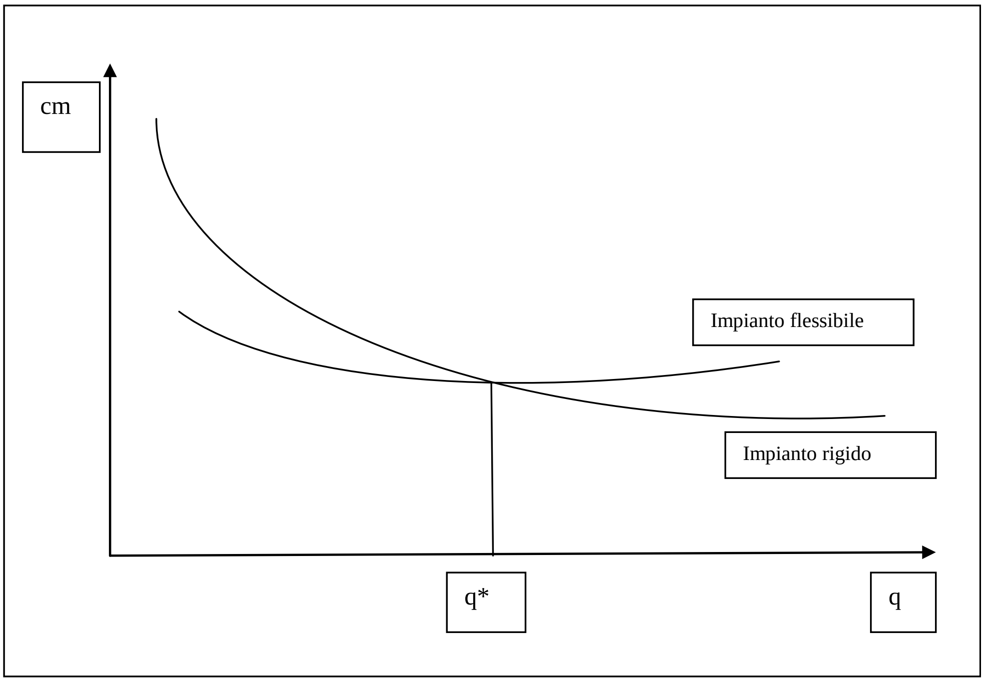
La flessibilità dei processi produttivi è un’altra tipica risposta dell’impresa all’incertezza produttiva. Come già anticipato in precedenza, vi è un tradeoff tra flessibilità e specializzazione dei processi produttivi: la flessibilità consente di mantenere costi minori su un ampio spettro di variabilità dei volumi produttivi; la specializzazione invece lavora con costi minori per volumi elevati o con minore variabilità rispetto a quelli dei processi flessibili, ma al prezzo di una maggiore rigidità; il che vuol dire che se i volumi effettivi non sono prossimi a quelli ex-ante con riferimento ai quali sono stati progettati i processi, i costi operativi salgono rapidamente.

Stigler (1939) ha sintetizzato la diversità tra impianti flessibili e specializzati nel modo seguente:



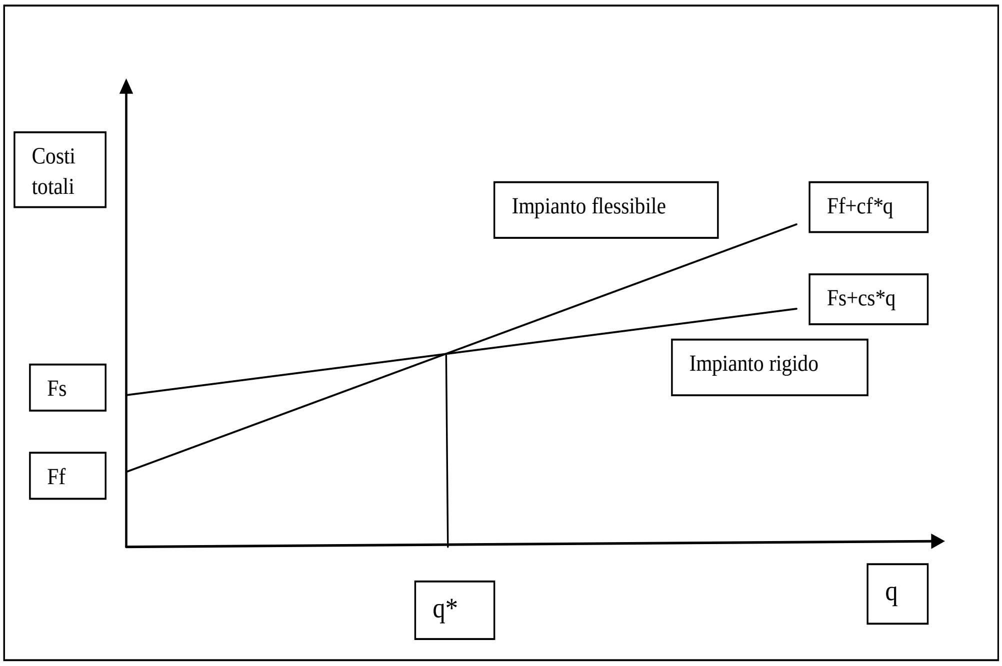
Se il volume produttivo rimane compreso tra q1 e q2 l'impianto rigido funziona con costi medi (cm) minori rispetto a quelli dell'impianto flessibile, ma se il volume dovesse superare q2 o essere inferiore a q1, allora l'impianto flessibile risulta più conveniente. L'entità dell'incertezza sul volume produttivo risulta quindi cruciale per la decisione dell'impresa su quale tipo di processo adottare.

Se invece si ipotizza che gli impianti rigidi richiedano volumi produttivi significativamente più elevati di quelli degli impianti flessibili si ha la seguente situazione:



Per volumi produttivi superiori a q* l'impianto rigido risulta nettamente più conveniente rispetto all'impianto flessibile mentre per volumi inferiori l'impianto flessibile opera a costi medi inferiori.

Nel caso semplificato di funzioni di costo lineare il grafico si semplifica come segue (sul grafico sono indicati i costi totali: costi fissi+variabili):



La valutazione della decisione sulla flessibilità dei processi è per sua natura un'analisi con orizzonte pluriennale, ma per mantenere un approccio semplificato in questa sede se ne considera l'impatto sui costi annuali. L'impresa dispone di un capitale pari ad M che può destinare (anche solo in parte) ad acquisire i servizi produttivi di impianti specializzati (rigidi) (Ms) o di impianti flessibili (Mf = M-Ms) La variabile decisionale è la quota di M destinata a Ms. Poiché si è privilegiata un'ottica di breve periodo, le conseguenze delle scelte produttive sono percepite in termini di costi annuali (come se l'impresa affittasse annualmente i beni capitali):

sia $\tilde{q}\ (= \bar{q} + \eta,\ con\ E(\eta) = 0\ e\ varianza\ \sigma_\eta^2)$ *il volume produttivo, soggetto ad un rischio additivo;*
siano $z_s,\ F_s,\ z_f,\ F_f$ *rispettivamente i costi variabili unitari ed i costi fissi di processi specializzati e flessibili.* p *è il prezzo di vendita dell'ouput* $\tilde{q}$*. Costi e ricavi sono rapportati ai valori unitari degli ammontare delle risorse* (M) *destinati ai due tipi di processo.*
In questo modello nulla vieta che l'impresa possa decidere di equipaggiarsi con un mix di processi flessibili e specializzati. Il profitto annuale è

$$\tilde{\pi} = [p\tilde{q} - z_s\tilde{q} - F_s]M_s + [p\tilde{q} - z_f - F_f](M - M_s) =$$
$$= p\tilde{q}M - (z_s - z_f)\tilde{q}M_s - z_f\tilde{q}M - (F_s - F_f)M_s - F_f M$$

Dividendo per M *e ponendo* $M_s / M = \alpha$ *il profitto è*

$$\tilde{\pi} = p\tilde{q} - (z_s - z_f)\tilde{q}\alpha - z_f\tilde{q} - (F_s - F_f)\alpha - F_f$$

con varianza uguale a $\sigma_\pi^2 = p^2\sigma_\eta^2 + (z_s - z_f)^2\alpha^2\sigma_\eta^2 + z_f^2\sigma_\eta^2 - 2p(z_s - z_f)\alpha\sigma_\eta^2 -$
$- 2pz_f\sigma_\eta^2 + 2(z_s - z_f)z_f\alpha\sigma_\eta^2$

L'equivalente certo del profitto vale

$$\pi_{CE} = p\bar{q} - (z_s - z_f)\bar{q}\alpha - z_f\bar{q} - (F_s - F_f)\alpha - F_f - \frac{\varphi}{2}\sigma_\pi^2$$

Derivando rispetto ad α *per la condizione di prim'ordine si ha*

$$\frac{d\pi_{CE}}{d\alpha} = -(z_s - z_f)\bar{q} - (F_s - F_f) - \frac{\varphi}{2}\left[2\alpha(z_s - z_f)^2\sigma_\eta^2 - 2p(z_s - z_f)\sigma_\eta^2 + 2(z_s - z_f)z_f\sigma_\eta^2\right] = 0$$

da cui $\alpha\varphi(z_s - z_f)^2\sigma_\eta^2 = -(z_s - z_f)\bar{q} - (F_s - F_f) + \varphi\sigma_\eta^2\left[(z_s - z_f)(p - z_f)\right] =$

$$\alpha = \frac{-\bar{q}}{\varphi(z_s - z_f)\sigma_\eta^2} + \frac{p - z_f}{z_s - z_f} - \frac{F_s - F_f}{\varphi(z_s - z_f)^2\sigma_\eta^2}$$

La ragionevolezza economica suggerisce che $z_s < z_f$ *e* $F_s > F_f$*; quindi i segni degli addendi sono:*

$\frac{-}{-} + \frac{+}{-} - \frac{+}{+}$*, con il vincolo che* $0 \le \alpha \le 1$

Come si vede incrementi del grado di avversione al rischio o/e dell'incertezza sui volumi produttivi hanno l'effetto di diminuire α, ovvero di spostare la scelta da impianti specializzati ad impianti flessibili.

15. IMPRESA IN CONCORRENZA: MICROECONOMIA E CAPM

Numerosi economisti finanziari hanno cercato di collegare la teoria microeconomica dell'impresa con la teoria della finanza: si considerino a titolo di esempio Hite (1977, 1979), Alberts-Hite (1983), Long-Racette (1974, 1979) e Subrahmanyam-Thomadakis (1980).

I modelli esaminati nelle sezioni precedenti possono essere reinterpretati nell'ambito del modello di determinazione del prezzo di equilibrio delle attività finanziarie in mercati perfetti (CAPM), pervenendo a specifiche ed interessanti reinterpretazioni delle soluzioni ottenute.

In questa sede per brevità si considera solo il caso di incertezza sul prezzo di vendita dell'output, mantenendo l'ipotesi di certezza sulle altre variabili, senza riprendere l'esame dei casi visti nelle sezioni precedenti.

L'impresa opera un contesto monoperiodale, in cui il flusso di cassa è rappresentato dal saldo tra ricavi e costi, al netto del valore di recupero dei beni capitali necessari alla produzione dell'output venduto (che per semplicità può essere immaginato nullo). In altri termini il flusso di cassa, che per ipotesi è incassato a fine periodo, rappresenta il valore economico dell'impresa[22] a quell'istante di tempo (W_1). Il valore economico ad oggi dell'impresa (W_0) non è altro che il valore attuale di W_1 scontato ad un tasso congruo per rischio:

$$W_0 = \frac{W_1}{1+r}$$

Poiché si sta lavorando in presenza di rischio (il prezzo è una variabile stocastica) il valore di W_1 è in realtà il valore atteso del flusso di cassa a fine periodo:

$$W_0 = \frac{E(W_1)}{1+r}$$

Il CAPM consente di valutare il valore economico ad oggi dell'impresa come valore attuale dell'equivalente certo scontato al tasso privo di rischio (i); l'equivalente certo è ottenuto rettificando il valore atteso per il premio per il rischio, misurato dalla covarianza tra il flusso di cassa ed il rendimento complessivo del mercato azionario, ovvero tenendo conto solo della componente di rischio sistematico[23]:

$$W_0 = \frac{E(W_1) - \lambda \operatorname{cov}(W_1, \tilde{r}_m)}{1+i}, \textit{ in cui } \lambda \textit{ è il premio di mercato per il rischio}$$

Sostituendo a W_1 la sua espressione $W_1 = \tilde{p}q - c(q) - F$ si ha:

[22] Poiché in questo lavoro si ignorano gli effetti delle decisioni di struttura finanziaria, il valore economico si riferisce ad un'impresa unlevered, ovvero finanziata con solo capitale azionario. Non si tiene conto altresì conto dell'impatto delle imposte.

[23] Per tutti si veda Rubinstein (1973).

$$W_0 = \frac{E[\tilde{p}q - c(q) - F] - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}q - c(q) - F, \tilde{r}_m)}{1+i} =$$
$$\frac{\bar{p}q - c(q) - F - \lambda E[(\tilde{p}q - c(q) - F - \bar{p}q - c(q) - F)(\tilde{r}_m - \bar{r}_m]}{1+i} =$$
$$= \frac{\bar{p}q - c(q) - F - \lambda E[(q(\tilde{p} - \bar{p})(\tilde{r}_m - \bar{r}_m)]}{1+i} = \frac{\bar{p}q - c(q) - F - \lambda q \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)}{1+i}$$

Poiché l'incertezza è concentrata sul prezzo dell'output il rischio sistematico dell'impresa è rappresentato dalla covarianza tra il prezzo dell'output ed il rendimento complessivo di mercato.

L'obiettivo dell'impresa consiste nella massimizzazione del suo valore di mercato, ovvero nella determinazione del volume produttivo q che rende massimo W_0:

derivando W_0 *rispetto a q e limitandoci alla condizione di prim'ordine si ha*

$$\frac{dW_0}{dq} = \frac{1}{1+i}\left[\bar{p} - c'(q) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)\right] = 0, \text{ che si annulla ponendo uguale a zero il}$$

termine tra parentesi, ovvero

$$\bar{p} - c'(q) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m) = 0, \text{ da cui } \bar{p} = c'(q) + \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m), \text{ o ancora } \bar{p} - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m) = c'(q)$$

Come si vede la relazione di equilibrio resta quella dell'eguaglianza tra prezzo e costo marginale, ma l'aggiustamento per il rischio riguarda solo la componente sistematica, come richiesto dal CAPM. Un aumento del prezzo di mercato del rischio (λ) o della covarianza con il rendimento di mercato (aumento della componente sistematica del rischio d'impresa) conduce all'eguaglianza con il costo marginale a livelli inferiori del volume produttivo: la stessa conclusione ottenuta con l'approccio della massimizzazione dell'utilità attesa o di quello M-V. Il costo del rischio può essere interpretato come un onere che l'impresa deve assorbire oltre al costo marginale, oppure come fattore rettificativo del prezzo medio atteso; in questo caso si ottiene l'equivalente certo del prezzo dell'output.

Nella soluzione di cui sopra si è implicitamente ipotizzato che prezzo, costi e covarianza fossero indipendenti dalla quantità prodotta; considerando invece il caso di un'impresa con potere di mercato (e la capacità di influenzare la formazione dei prezzi) si ha:

$$\frac{dW_0}{dq} = \frac{1}{1+i}\left[\bar{p} + q\frac{d\bar{p}}{dq} - c'(q) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m) - \lambda q \frac{d \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)}{dq}\right] = 0$$

Se si definisce $e_{p,q}$ *l'elasticità del prezzo atteso rispetto a q (ovvero l'inverso della elasticità della domanda) ed* $e_{\operatorname{cov},q}$ *l'elasticità della covarianza rispetto a q si ha:*

$$q\frac{d\bar{p}}{dq} = \bar{p}e_{p,q} \text{ e } q\frac{d \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)}{dq} = \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)e_{\operatorname{cov},q} \text{ e quindi}$$

$$\bar{p}(1 + e_{p,q}) - c'(q) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)(1 + e_{\operatorname{cov},q}) = 0 \text{ e quindi}$$

$$\bar{p}(1 + e_{p,q}) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p}, \tilde{r}_m)(1 + e_{\operatorname{cov},q}) = c'(q)$$

Se i costi vengono scritti come somma di oneri per lavoro e capitale, si ha

$$W_0 = \frac{\bar{p}q - wL - \phi K - \lambda q \operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{r}_m)}{1+i}$$, *ove L e K indicano le quandità dei fattori lavoro e capitale e w e ϕ sono i loro costi unitari (salario e costo per i servizi del capitale).*

Derivando rispetto a q si ottiene l'espressione generale

$$\frac{dW_0}{dq} = \frac{1}{1+i}\left[\bar{p} + q\frac{d\bar{p}}{dq} - L\frac{dw}{dq} - w\frac{dL}{dq} - K\frac{d\phi}{dq} - \phi\frac{dK}{dq} - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{r}_m) - \lambda q \frac{d\operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{r}_m)}{dq}\right] = 0$$

Definendo le seguenti elasticità :

$$e_{w,q} = \frac{dw}{dq}\frac{q}{w};\; e_{L,q} = \frac{dL}{dq}\frac{q}{L};\; e_{K,q} = \frac{dK}{dq}\frac{q}{K};\; e_{\phi,q} = \frac{d\phi}{dq}\frac{q}{\varphi}$$

si può scrivere $L\frac{dw}{dq} = e_{w,q}L\frac{w}{q};\; w\frac{dL}{dq} = e_{L,q}w\frac{L}{q};\; K\frac{d\phi}{dq} = e_{\varphi,q}K\frac{\varphi}{q};\; \varphi\frac{dK}{dq} = e_{K,q}\phi\frac{K}{q}$

e quindi ricordando le espressioni delle elasticità del prezzo e della covarianza rispetto a q si ottiene :

$$\bar{p}(1+e_{p,q}) - \frac{wL}{q}\left(e_{w,q} + e_{L,q}\right) - \frac{\phi K}{q}\left(e_{\phi,q} + e_{K,q}\right) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{r}_m)(1+e_{\operatorname{cov},q}) = 0$$

$$\bar{p}(1+e_{p,q}) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{r}_m)(1+e_{\operatorname{cov},q}) = \frac{wL}{q}\left(e_{w,q} + e_{L,q}\right) + \frac{\varphi K}{q}\left(e_{\varphi,q} + e_{K,q}\right)$$

Se l'impresa è piccola rispetto al mercato dei fattori, le elasticità dei salari e del costi per il servizio del capitale sono nulle e l'espressione di cui sopra si semplifica come segue:

$$\bar{p}(1+e_{p,q}) - \lambda \operatorname{cov}(\tilde{p},\tilde{r}_m)(1+e_{\operatorname{cov},q}) = \frac{wL}{q}e_{L,q} + \frac{\varphi K}{q}e_{K,q}$$

Il prezzo atteso, aggiustato per il rischio, e corretto per l'inverso della elasticità della domanda, eguaglia la somma dei costi medi corretti per le rispettive elasticità della domanda dei fattori produttivi.

16. CONCLUSIONI

L'inserimento del rischio nei modelli della microeconomia classica modifica significativamente le conclusioni standard della teoria economica.

Pur con le limitazioni derivanti dall'uso di modelli assai semplificati, si possono trarre alcune conclusioni sull'influenza del rischio sulle decisioni di breve periodo dell'impresa in concorrenza:

a) L'impatto del rischio può essere assimilato ad un costo aggiuntivo di cui l'impresa deve tenere conto
b) Il volume produttivo ottimale in condizioni di rischio è inferiore a quello in condizioni di certezza: ciò significa che la presenza di incertezza conduce ad una tendenziale sottoutilizzazione della capacità produttiva ed all'accumulo di capacità in eccesso nel sistema economico. Politiche economiche che riducono l'incertezza nel sistema hanno pertanto un effetto benefico sui livelli produttivi e sull'occupazione; per contro, a parità

di condizioni, un aumento dell'incertezza nel sistema determina una diminuzione della produzione e della capacità produttiva sfruttata e l'accumulo di capacità in eccesso

c) L'incertezza sui fattori produttivi comporta un cambiamento del mix, con diminuzione relativa del fattore rischioso e spostamento verso fattori sui quali prevalgono le condizioni di certezza
d) Alcune conclusioni ricavate dall'analisi microeconomia in incertezza dipendono da com'è modellato il rischio: il rischio additivo è in generale più semplice da considerare rispetto a quello moltiplicativo e le soluzioni che si ottengono sono più prossime a quelle della microeconomia in condizioni di certezza
e) In presenza di rischio su più fattori di input o su più linee di output le decisioni aziendali vengono a dipendere dalla correlazione con cui si combinano tra loro i diversi fattori di incertezza
f) L'integrazione verticale, la diversificazione produttiva o geografica, l'investimento in scorte, l'adozione di processi flessibili, le decisioni di hedging sono tutti esempi di scelte che possono contribuire ad attenuare l'impatto dei rischi sull'economia dell'impresa.

Molti risultati ricavati in questa sede sono stati ottenuti ricorrendo all'approccio media-varianza, che consente una notevole semplificazione dell'analisi rispetto all'approccio della massimizzazione dell'utilità attesa. Tale semplificazione è consentita nel caso in cui il rischio sia modellabile come combinazione lineare di variabili casuali, condizionatamente alla scelta del valore appropriato del parametro di avversione assoluta al rischio.

Se si considera l'esistenza di un mercato finanziario perfetto in cui i rendimenti attesi delle attività sono determinati da un modello di equilibrio tipo il CAPM, il parametro di rischio può essere derivato direttamente dal mercato ed utilizzato per determinare i valori ottimali delle scelte microeconomiche delle imprese.

In questa sede si è considerato esclusivamente l'orizzonte di breve periodo, rinviando ad un successivo lavoro l'analisi delle decisioni di lungo periodo e l'impatto delle scelte finanziarie.

17. BIBLIOGRAFIA

K.Aiginger “Production and decision theory under uncertainty”, edizioni Basil Blackwell, 1987

W.Alberts, G.Hite “The Modigliani-Miller leverage equation considered in a product market context” Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1983, pagg.425-437

M.Alghalith “New economics of risk and uncertainty”, Nova Science Publ., 2007

D.Baron “Price uncertainty, utility and industry equilibrium in pure competition”, International Economic Review, 1970, pagg.463-480

R.Batra, A.Ullah “Competitive firm and the theory of input demand under price uncertainty”, Journal of Political Economy, 1974, pagg.537-548

J.Chavas “Risk analysis in theory and practice” edizioni Elsevier, 2004

R.Clarke “Certainty-equivalence and the theory of the firm under uncertainty”, International Economic Review, 1985, pagg.323-329

D.Coes “Firm output and changes in uncertainty”, American Economic Review, 1977, pagg.249-251

G.Feder “Farm size, risk aversion and the adoption of new technology under uncertainty”, Oxford University Paper, 1980, pagg.263-283

R.Hartman “Factor demand with output price uncertainty”, American Economic Review, 1976 pagg.675-681

G.Hawawini “A mean-standard deviation exposition of the theory of the firm under uncertainty: a pedagogic note”, American Economic Review, 1978, pagg. 194-202

D.Hiebert “Cost flexibility and price dispersion”, Journal of Industrial Economics, 1989, pagg.103-109

G.Hite “Leverage, output effects and the M-M theorems”, Journal of Financial Economics, 1977, pagg.177-202

G.Hite “On the theory of the firm in a capital asset pricing model world”, in J.Bicksler (ed) “Handbook of Financial Economics”, ed. North-Holland, 1979.

D.Holthausen “Input choices and uncertain demand”, American Economic Review, 1976, pagg.94-103

D.Holthausen “Hedging and the competitive firm under price uncertainty”, American Economic Review, 1979, pagg.989-995

H.Leland “ Theory of the firm facing uncertain demand”, American Economic Review, 1972, pagg. 278-291

M.Long, G.Racette “Stochastic demand, output and the cost of capital”, Journal of Finance, 1974, pagg.499-506

M.Long, G.Racette “Stochastic demand and the equity capitalization rate”, Journal of Business Finance and Accounting, 1979, pagg.475-493

J.McCall “Probabilistic microeconomics”, Bell Journal of Economics and Management Science, 1971, pagg.403-433

C.McKenna “The economics of uncertainty”, edizioni Wheatsheaf Books, 1986

J.Pratt “Risk aversion in the small and in the large”, Econometrica, 1964, pagg.122-136

L.Robinson, P.Barry “The competitive firm’s response to risk”, Macmillan Publ., 1987

G.Rossini “Incertezza” edizioni Springer-Verlag, 1993

M.Rubinstein “A mean-variance sinthesis of corporate financial theory”, Journal of Finance, 1973, pagg.167-181

A.Sandmo “On the theory of the competitive firm under price uncertainty”, American Economic Review, 1971, pagg.65-73

G.Stigler “Production and distribution in the short run”, Journal of Political Economy, 1939, pagg.305-327

M.Subrahmanyam, S.Thomadakis “Systematic risk and the theory of the firm”, Quarterly Journal of Economics, 1980, pagg.437-451

S.Turnovsky “Production flexibility, price uncertainty and the behavior of the competitive firm”, International Economic Review, 1973, pagg.395-413

18. APPENDICE: ANALOGIA TRA DIVERSIFICAZIONE FINANZIARIA E COMMERCIALE

Un investitore ha un ammontare di ricchezza pari a W e decide di allocarne una parte, X, nel titolo rischioso 1, con un rendimento aleatorio pari a r_1 e la quota restante, W-X, nel titolo rischioso 2, che genera un rendimento aleatorio r_2.

$$\text{Il rendimento di portafoglio è } \tilde{r}_P = \tilde{r}_1 X + \tilde{r}_2 (W - X)$$

$$\text{con varianza } \sigma_P^2 = E\left[\tilde{r} X + \tilde{r}_2 (W - X) - \bar{r} X - \bar{r}_2 (W - X)\right]^2 =$$

$$= X^2 \sigma_1^2 + (W - X)^2 \sigma_2^2 + 2X(W - X)\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\text{se } \rho = 1,\ \sigma_P^2 = \left[X\sigma_1 + (W - X)\sigma_2\right]^2$$

$$\text{se } \rho = -1,\ \sigma_P^2 = \left[X\sigma_1 - (W - X)\sigma_2\right]^2$$

$$\text{se } \rho = 0,\ \sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + (W - X)^2\sigma_2^2$$

$$\text{il tasso di rendimento atteso è } \bar{r}_P = \bar{r}_1 X + \bar{r}_2 (W - X)$$

$$\text{e l'equivalente certo è } r_{P,CE} = \bar{r}_1 X + \bar{r}_2 (W - X) - \frac{\varphi}{2}\sigma_P^2$$

Il problema dell'investitore consiste nel trovare il valore ottimo di X;

derivando rispetto ad X per la condizione di prim'ordine si ha

$$\frac{dr_{P,CE}}{dX} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 - \varphi(X\sigma_1^2 - (W - X)\sigma_2^2 + (W - 2X)\rho\sigma_1\sigma_2) = 0 =$$

$$= \bar{r}_1 - \bar{r}_2 - \varphi X(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) + \varphi W(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) = 0 \text{ e quindi}$$

$$X = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \varphi W(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)}{\varphi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}, \text{ che si semplifica come segue}$$

$$\text{per } \rho = 1,\ X = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \varphi W(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)}{\varphi(\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

$$\text{per } \rho = -1,\ X = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \varphi W(\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2)}{\varphi(\sigma_1 + \sigma_2)^2}$$

$$\text{per } \rho = 0,\ X = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \varphi W\sigma_2^2}{\varphi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Nel caso in cui la somma W-X venga investita in un titolo certo (con rendimento non aleatorio peri ad i), il problema si modifica come segue:

$$Il\ \text{rendimento di portafoglio è}\ \tilde{r}_P = \tilde{r}_1 X + i(W - X)$$
$$\text{con varianza}\ \sigma_P^2 = E\left[\tilde{r}X - \bar{r}X)\right]^2 = X^2\sigma_1^2$$
$$\text{il tasso di rendimento atteso è}\ \bar{r}_P = \bar{r}_1 X + i(W - X)$$
$$\text{e l'equivalente certo è}\ r_{P,CE} = \bar{r}_1 X + i(W - X) - \frac{\varphi}{2}X^2\sigma_1^2$$
$$\text{derivando rispetto ad}\ X\ \text{per la condizione di prim'ordine si ha}$$
$$\frac{dr_{P,CE}}{dX} = \bar{r}_1 - i - \varphi X\sigma_1^2 = 0 =$$
$$\text{da cui}\ X = \frac{\bar{r}_1 - i}{\varphi\sigma_1^2}$$