LE MARTINGALE: ASPETTI TEORICI ED APPLICATIVI

[The martingales: theoretical and empirical characteristics]

Fabrizio Erbetta
(Ceris-Cnr)

e

Luca Agnello

Settembre 2001

Abstract

This paper offers an overview on the characteristics of martingales. These latter are markovian processes without underlying trend, in which the stochastic variable depends on its ultimate realisation. Some application fields are in studies relative to financial markets, and especially the derivative securities. Drawing from the theoretical and empirical literature, the main mathematical characteristics are presented. In order to transform processes with increasing or decreasing trends into martingales, the Doob-Meyer decomposition and the change of probability measure approaches can be adopted. Finally, four applications are considered with regard to the pricing of futures, call options and stocks.

Keywords: Martingales, stochastic processes, calculus of probability

Jel Classification: G12, G13, D81

Desidero ringraziare Silvana Zelli e Maria Zittino per la loro costante e preziosa collaborazione tecnica nella predisposizione di questo paper.

WORKING PAPER CERIS-CNR
Anno 3, N° 7 – 2001
Autorizzazione del tribunale di Torino
N. 2681 del 28 marzo 1977

Direttore Responsabile
Secondo Rolfo

Direzione e Redazione
Ceris-Cnr
Via Avogadro, 8
10121 Torino, Italy
Tel. +39 011 5601.111
Fax +39 011 562.6058
E-mail *segreteria@ceris.cnr.it*

Segreteria di redazione
Maria Zittino

Distribuzione
Spedizione gratuita

Fotocomposizione e impaginazione
In proprio

Stampa
In proprio

Finito di stampare nel mese di ottobre 2001

INDICE

1. Introduzione

Il presente lavoro si compone di due parti. La prima costituisce una rassegna a carattere teorico, volta ad illustrare i concetti fondamentali della teoria delle martingale e di fornire una adeguata conoscenza di tutti gli strumenti e di tutte le proprietà che torneranno utili, nel proseguo del lavoro, ai fini di una più facile comprensione delle modalità attraverso le quali sono raggiunti determinati risultati.

La seconda parte, come verrà ulteriormente chiarito in seguito, mira a porre in risalto la vasta applicabilità della teoria delle martingale per la rappresentazione delle problematiche di ordine finanziario.

A questo scopo verranno presentate alcune applicazioni relative al *pricing* di alcuni strumenti derivati (*futures* e *call options*) e dei titoli sottostanti.

Nel complesso si cercherà di verificare fino a che punto l'uso delle martingale sia compatibile, in termini di congruenza, con le logiche sottostanti il funzionamento dei mercati finanziari ed inoltre si illustreranno le tecniche, utilizzate dalle moderne metodiche in materia di *asset pricing*, di trasformazione dei processi stocastici in martingale laddove tale trasformazione permette agli analisti finanziari una più facile trattazione delle problematiche finanziarie.

2. Concetti fondamentali nella teoria delle martingale

2.1. Definizione di misura di probabilità e valore atteso condizionale

Prima di procedere alla descrizione teorica di una martingala occorre introdurre brevemente alcuni importanti concetti preliminari.

La struttura dell'analisi probabilistica procede attraverso la definizione di particolari funzioni che associano a eventi semplici, denominati ω, con $\omega \in \Omega$ (detto spazio degli eventi, il quale comprende tutti i possibili esiti relativi ad un esperimento o prova), valori P_ω, che rappresentano delle misure di probabilità (Billingsley, 1979; Lindley, 1965). Su tali eventi è possibile definire operazioni logiche come intersezione, unione negazione e complemento, tali da generare eventi più complessi soggetti a misurazione probabilistica. Sulla base di questa impostazione discende la definizione di σ-algebra (Galeotti, 1984; Dall'Aglio, 1987).

Definizione 2.1.1 Una classe $\Im$ di sottoinsiemi definita su uno spazio Ω è detta σ-algebra se, data una successione infinita di eventi $\{A_i\}$ con $A_i \in \Im$ e i=1, 2, … , si ha che:

i. dati due insiemi A_k e A_j entrambi appartenenti ad $\Im$, con $k \neq j$ allora $A_k \cup A_j \in \Im$;

ii. dato $A_j \in \Im$, anche $\overline{A_j} \in \Im$[1]

iii. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$

Una σ-algebra oltre a godere della additività infinita (o σ-additività) è anche finitamente additiva, ovvero, chiusa rispetto ad un insieme infinito di eventi.

Sugli spazi di eventi così definiti, vengono assegnate delle misure di probabilità che rappresentano la verosimiglianza del loro verificarsi. Inoltre il loro ordinamento temporale viene modellizzato secondo la logica della filtrazione. Le seguenti definizioni di misura di probabilità e di filtrazione temporale sono contenute in Billingsley (1979), De Finetti (1970), Breiman (1992), Loève(1978).

Definizione 2.1.2 Sia Ω lo spazio dei risultati possibili e $\Im$ una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω, allora si dice misura di probabilità una qualsiasi funzione P definita su $\Im$, tale che:

i. se $A \in \Im \Rightarrow P(A) \geq 0$;

ii. $P(\Omega) = 1$, con $\Omega \in \Im$;

iii. se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, $\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

La tripla $\{\Omega, \Im, P\}$ è detta spazio misurabile o spazio di probabilità.

Definizione 2.1.3 Una filtrazione dello spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, P\}$ è una famiglia di σ-algebre $\{\Im_t\}$, con $0 \leq t \leq T$, tale che:

iv. dato $0 \leq s \leq t \leq T$ si ha che $\Im_s \subset \Im_t$, per ogni s, t;

v. dato $0 \leq t \leq T$ si ha che $\Im_t = \bigcap_{u \geq t} \Im_u$, per ogni u, t.

Una filtrazione può essere interpretata come una successione "crescente" di informazioni a disposizione del *decision-maker* nei vari istanti t, con $t \in [0,T]$. Una

[1] Se $A_k \in F$ e $A_j \in F$ con $k \neq j$ allora $(A_k \cap A_j) \in F$ infatti per la formula di De Morgan si ha che: $\overline{(\overline{A}_k \cup \overline{A}_j)} = A_k \cap A_j$.

variabile aleatoria si dice $\Im_t$- misurabile se è completamente definita e quindi nota, dato il set informativo al tempo t, $\Im_t$.

Come noto, la probabilità condizionale di un evento A rispetto un altro evento B è definita come:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad [1]$$

Analogamente si definisce il valore atteso condizionale della variabile aleatoria X rispetto alla σ-algebra $\Im$, $E(X|\Im)$. Il valore atteso condizionale gode di alcune importanti proprietà:

a) $E[E(X|\Im)] = E[X]$, la quale riflette la ben nota legge statistica secondo la quale la media campionaria è uno stimatore non distorto del valore medio della popolazione;

b) se X è $\Im$-misurabile allora $E[X|\Im] = x$,
dove X rappresenta la variabile aleatoria mentre x rappresenta la realizzazione osservata sulla base delle informazioni contenute nella σ-algebra $\Im$

c) $E[(a_1X_1 + a_2X_2)|\Im] = a_1E[X_1|\Im] + a_2E[X_2|\Im]$,
proprietà di linearità;

d) se $X \geq 0$ allora $E[X|\Im] \geq 0$,
proprietà di positività;

e) se Φ: $R \rightarrow$ R è una funzione convessa e se $E[\Phi(X)] < \infty$, allora:
$E[\Phi(X)|\Im] \geq \Phi E[X|\Im]$,
la quale rappresenta la disuguaglianza di Jensen applicata alla proprietà condizionale;

f) se $\Re$ è una σ-algebra contenuta in $\Im$ allora $E[E(X|\Im)|\Re] = E[X|\Re]$,
Questa proprietà è detta *tower property* e costituisce una condizione di sufficienza assai utilizzata nella teoria delle decisioni. Infatti essa consente di sfruttare σ-algebre con meno informazioni per ottenere stimatori, comunque, non distorti.

g) se Z è $\Im$- misurabile allora $E[ZX|\Im] = ZE(X|\Im)$,
infatti Z è noto sulla base delle informazioni contenute in $\Im$.

2.2. Le martingale

I dati di natura finanziaria sono tipicamente strutturati come serie storiche. Tali serie statistiche possono essere intese come una successione di osservazioni che si sviluppano logicamente secondo una dimensione temporale. La principale difficoltà connessa con la gestione di questo tipo di dati consiste nella correlazione tra le osservazioni rilevate in diversi strati di tempo. In un'ottica probabilistica, una serie storica deve essere interpretata come una particolare realizzazione (o traiettoria) di un processo stocastico, idealizzabile come una sequenza di variabili aleatorie S_i, con i $\in$ [0, T], la cui distribuzione risulta generalmente ignota (Piccolo e Vitale, 1984; Parzen, 1962).

Una martingala rappresenta un particolare processo stocastico frequentemente utilizzato nella modellizzazione delle dinamiche finanziarie (Musiela e Rutkowski, 1997).

Definizione 2.2.1 Sia $\{S_t\}$ una sequenza di variabili casuali su uno spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, P\}$, e $\{\Im_t\}$ una sequenza di σ-algebre. La sequenza $\{(S_t, \Im_t)$: t=1,2,….} è una martingala rispetto a $\{\Im_t\}$ se valgono le seguenti condizioni:

i. $\Im_t \subset \Im_{t+1}$;

ii. S_t è $\Im_t$-misurabile;

iii. $E[|S_t|]<\infty$;

iv. $E[S_{t+1}|\ \Im_t] = S_t$, quasi certamente, con S_t noto.

La legge di dipendenza tra le variabili aleatorie che definiscono questo processo è caratterizzata dal fatto che il valore atteso di S_{t+1}, date le realizzazioni delle variabili aleatorie nei tempi precedenti, dipende solo dal valore assunto dalla variabile considerata nel periodo immediatamente precedente.

La condizione (i) è detta *proprietà di monotonicità*. Essa afferma che $\{\Im_t\}$ è una sequenza crescente di σ-algebre. Intuitivamente, tale fatto implica che l'ammontare di informazioni contenute nelle σ-algebre cresce al crescere di t.

La condizione (ii) è detta *proprietà di misurabilità*. Essa afferma che, per ogni n, S_t è conosciuta date le informazioni contenute in $\Im_t$.

La condizione (iii) è detta *proprietà di integrabilità*. Essa afferma che il valore atteso del modulo di S_t, per ogni t, esiste finito.

La condizione (iv) è detta *proprietà di martingala*. Essa afferma che la miglior previsione relativa ad un valore futuro non ancora osservato è data esattamente dall'ultima osservazione realizzata. Le martingale possono dunque essere interpretati come processi markoviani.

Analogamente alle martingale vengono definite le sub-martingale e le super-martingale.

Definizione 2.2.2 Siano $\{S_t\}$ una sequenza di variabili casuali su uno spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, P\}$, e $\{\Im_t\}$ una sequenza di σ-algebre. La sequenza $\{(S_t, \Im_t):t=1,2,\ldots\}$ è una submartingala rispetto a $\{\Im_t\}$ se valgono le seguenti condizioni:

i. $\Im_t \subset \Im_{t+1}$;

ii. S_t è $\Im_t$-misurabile;

iii. $E[|S_t|]<\infty$;

iv. $E[S_{t+1}| \Im_t] \geq S_t$, quasi certamente, con S_t noto.

Definizione 2.2.3 Siano $\{S_t\}$ una sequenza di variabili casuali su uno spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, P\}$, e $\{\Im_t\}$ una sequenza di σ-algebre. La sequenza $\{(S_t, \Im_t):t=1,2,\ldots\}$ è una supermartingala rispetto a $\{\Im_t\}$ se valgono le seguenti condizioni:

i. $\Im_t \subset \Im_{t+1}$;

ii. S_t è $\Im_t$-misurabile;

iii. $E[|S_t|]<\infty$;

iv. $E[S_{t+1}| \Im_t] \leq S_t$, quasi certamente con S_t noto.

Sulla base di queste definizioni si deduce che un processo stocastico si comporta come una martingala se la sua traiettoria non mostra uno specifico trend sottostante, ovvero se le direzioni assunte dai movimenti futuri sono, in media, uguali ai valori osservati all'istante attuale (Neftci, 1996; Williams, 1991; Resnick, 1999). Qualora le traiettorie di un processo individuino trend di lungo periodo, allora il processo non si potrebbe configurare come una martingala. Supponendo che $\{S_t\}$ sia una martingala e considerando la previsione, fatta al tempo t, relativa ad una variazione del processo su un intervallo di tempo di lunghezza Δt, con $\Delta t > 0$, si ha che:

$$E[S_{t+\Delta t} - S_t \mid \Im_t] = E[S_{t+\Delta t} \mid \Im_t] - E[S_t \mid \Im_t] \qquad [2]$$

da cui segue che:

$$E[S_{t+\Delta t} - S_t \mid \Im_t] = 0 \qquad [3]$$

ovvero l'incremento della variabile aleatoria è, in media, nulla. Questo induce a ritenere che la martingala è un processo stazionario.

Diversamente, un processo in media crescente si definisce submartingala, mentre un processo in media decresce è chiamato supermartingala, fatte salve le restanti condizioni.

2.3. Trasformazione di submartingale in martingale

Spesso i processi che si definiscono nella realtà non sono martingale, nel senso che i movimenti futuri non sono completamente imprevedibili, ovvero le variazioni medie non sono pari a zero, date le informazioni correnti. I prezzi delle attività finanziarie si comportano, infatti, come delle supermartingale, o ancora più frequentemente come delle submartingale. Esiste, tuttavia, una connessione tra le martingale e le submartingale, attraverso la quale è possibile convertire le seconde nelle prime.

Un primo metodo di trasformazione è quello che sfrutta la cosiddetta *scomposizione di Doob-Meyer*. Un secondo metodo prevede, invece, l'utilizzo delle *misure equivalenti di probabilità*. In questo contesto assume rilevanza il cosiddetto *teorema di Girsanov* (Neftci, 1996; Hull, 1989; Kingman e Taylor, 1966).

Nel seguito verranno trattati entrambi gli strumenti metodologici.

Approccio diretto: teorema di Doob-Meyer

Prima di presentare il teorema della scomposizione di submartingale, è opportuno definire cosa si intende per processo prevedibile e processo crescente.

Definizione 2.3.1: dato un processo $\{A_t\}$ ed una successione $\{\Im_t\}$di σ-algebre, con $t \geq 0$, si dice che $\{A_t\}$ è *prevedibile* se $A_0 \in \Im_0$, e, per ogni $t \geq 0$, si ha che $A_{t+1} \in \Im_t$.

Un processo $\{A_t\}$, con $t \geq 0$, è detto *crescente* se $\{A_t\}$ è prevedibile e quasi certamente vale che $0=A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_t \leq \ldots$.

***Teorema 2.3.1* (di scomposizione di Doob-Meyer):** qualsiasi submartingala $\{(X_t, \Im_t)\}$, $t \geq 0$, può essere scritta, in un unico modo, come la somma di una martingala $\{(S_t, \Im_t)\}$, $t \geq 0$, e di un processo crescente $\{A_t, t \geq 0\}$, ovvero si ha che:

$$X_t = S_t + A_t, \qquad t \geq 0.$$

Le dimostrazioni dell'esistenza ed unicità della scomposizione sono contenute nell'appendice A (Neftci, 1996).

Con il teorema di Doob-Meyer è possibile scomporre, in maniera univoca, una submartingala in una martingala più un elemento residuo che è rappresentato da un processo crescente. In sintesi, tale teorema afferma che sottraendo da una submartingala in media crescente $\{X_t\}$ un processo a traiettoria crescente $\{A_t\}$, le deviazioni rispetto al trend assumono un comportamento assolutamente irregolare. Questo processo "trasformato" $\{S_t\}$ è proprio una martingala. Con la tecnica di scomposizione di Doob-Meyer si evidenzia, dunque, come sia possibile trasformare "direttamente" una submartingala in modo da ottenere una martingala.

Trasformazione della misura di probabilità e teorema di Girsanov

Un altro metodo di conversione di submartingale in martingale si fonda sulla trasformazione della distribuzione di probabilità che governa un processo a traiettorie crescenti. In pratica, dato un processo $\{e^{-r\Delta t}S_{t+\Delta t}\}$, con Δt>0, definito come valore attuale in t del prezzo di un titolo azionario al tempo t+Δt, ad un tasso di attualizzazione *risk-free*, e secondo un regime di capitalizzazione composta, si ha che:

$$E_t^P[e^{-r\Delta t}S_{t+\Delta t}] > S_t \qquad [4]$$

ovvero, sulla base della effettiva distribuzione di probabilità P, il processo $\{e^{-r\Delta t}S_{t+\Delta t}\}$ è una submartingala[2]. In questo caso, è possibile cercare una "nuova" distribuzione di probabilità $\tilde{P}$ sottostante il processo, tale per cui valga la relazione di uguaglianza:

$$E_t^{\tilde{P}'}[e^{-r\Delta t}S_{t+\Delta t}] = S_t \qquad [5]$$

ovvero $\{e^{-r\Delta t}S_{t+\Delta t}\}$ diventi una martingala, mantenendo il tasso *risk-free* come tasso di attualizzazione.

Le distribuzioni di probabilità attraverso le quali è possibile trasformare processi che non sono martingale in martingale vengono dette *misure equivalenti di probabilità*[3] (Neftci, 1996). Le condizioni generali che permettono la trasformazione delle misure probabilistiche sono definite nel teorema di Girsanov. Prima di passare alla presentazione formale del teorema è, però, opportuno introdurre brevemente la problematica della trasformazione di misura di probabilità attraverso il caso di una variabile aleatoria distribuita normalmente ed in seguito definendo il concetto di *derivata di Radon-Nikodym*. come derivata di una misura di probabilità rispetto un'altra (Neftci, 1996; Elliot, 1982; Karatzas e Shreve, 1988).

---

2 Tale comportamento discende dal fatto che il tasso *risk-free* non sconta il premio al rischio che grava sui titoli azionari. Per avere una eguaglianza occorrerebbe sostituire il tasso r con un tasso specifico relativo ad ogni signola impresa, opportunamente corretto con l'elemento rischio (Hull, 1989).

3 Le probabilità così trasformate sono dette *equivalenti* perché assegnano probabilità positive agli stessi domini. Sebbene le misure di probabilità siano differenti, è sempre possibile, tramite appropriate trasformazioni convertire una nell'altra (Neftci, 1996).

Fissato un tempo t, si consideri una variabile aleatoria Z_t distribuita secondo una normale standard $Z_t \sim N(0, 1)$.

La misura di probabilità implicita assegnata ad una possibile realizzazione z_t è indicata come differenziale della funzione *P*, intesa come cumulata, ovvero:

$$dP(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(z_t)^2} dz \qquad [6]$$

Si definisca, quindi, la funzione

$$\xi(z_t) = e^{z_t \mu - 1/2\mu^2} \qquad [7]$$

Moltiplicando la funzione $\xi(z_t)$ per la misura di probabilità definita da $dP(z_t)$, si ottiene una nuova misura di probabilità indicata dalla seguente espressione:

$$[\mathrm{dP}(z_t)][\xi(z_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(z_t) + \mu z_t - 1/2\mu^2} \mathrm{d}z_t. \qquad [8]$$

Indicando con $[dP(z_t)]*[\xi(z_t)]$ la nuova misura di probabilità $d\tilde{P}(z_t)$, si ha che:

$$d\tilde{P}(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(z_t - \mu)^2} dz \qquad [9]$$

Si può osservare come $\tilde{P}(z_t)$ rappresenti ora una nuova misura implicita di probabilità estratta da una distribuzione normale con media μ e varianza unitaria. Pur rimanendo invariata la dispersione della variabile aleatoria intorno alla media, le due misure di probabilità sono diverse, dal momento che le medie su cui sono centrate non coincidono ed inoltre esse assegnano valori di probabilità differenti agli stessi intervalli sull'asse *z*.

Occorre, inoltre, osservare che la trasformazione di misura che coinvolge $P(z_t)$ è reversibile, infatti si ha che:

$$\xi(z_t)^{-1} d\tilde{P}(z_t) = dP(z_t) \qquad [10]$$

Qualora ci si riferisca al caso di una sola variabile aleatoria distribuita normalmente con media μ e varianza σ^2, si può esplicitare la forma assunta dalla funzione $\xi(z_t)$, nel modo seguente:

$$\xi(z_t) = e^{\frac{z_t \mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \qquad [11]$$

Il medesimo procedimento può essere applicato se, anziché una unica variabile aleatoria, si ha un vettore di variabili casuali distribuite normalmente. In questo caso occorre, naturalmente, fare riferimento all'espressione della normale multivariata. Una volta definita la matrice di varianza e covarianza è possibile ottenere una funzione $\xi(z_{1t},z_{2t},\ldots z_{nt})$ tale da permettere la trasformazione di misura:

$$d\tilde{P}(z_{1t},\ldots z_{nt}) = \xi(z_{1t},\ldots,z_{nt})dP(z_{1t},\ldots,z_{nt}) \qquad [12]$$

Una volta definite $dP(z_t)$ e $d\tilde{P}(z_t)$ come due misure equivalenti da assegnare agli elementi di una σ-algebra $\Im_t$, è possibile introdurre il teorema di Radon-Nikodym.

Teorema 2.3.2 (di Radon-Nikodym): Date due misure v e μ, se v è assolutamente continua[4] rispetto a μ, allora esiste una funzione X non negativa ed $\Im$-misurabile tale che, per ogni $A\in\Im$, si ha:

$$v(A) = \int_A X d\mu$$

ossia $X=dv/d\mu$.

Nell'ambito della problematica delle misure equivalenti, la derivata di Radom-Nikodym è proprio la funzione $\xi(z_t)$, infatti essa può essere vista come rapporto tra due misure:

$$d\tilde{P}(z_t)/dP(z_t) = \xi(z_t). \qquad [13]$$

Affinché la funzione $\xi(z_t)$ esista è necessario che il denominatore del rapporto sia diverso da zero. La trasformazione inversa implica, inoltre, che anche il numeratore sia diverso da zero. Sia il numeratore che il denominatore sono misure probabilistiche assegnate ad intervalli infinitesimali dz. Si ha quindi la seguente proposizione.

Proposizione 2.3.1: Condizione necessaria e sufficiente affinché la derivata di Radon-Nikodym esista è che, quando $\tilde{P}$ assegna una probabilità non nulla a dz, anche la funzione P deve assegnare allo stesso intervallo una misura probabilistica diversa da zero:

$$\tilde{P}(zt) > 0 \Leftrightarrow P(z_t)>0$$

[4] Date due misure v e μ su $\Im$, v si dice assolutamente continua rispetto a μ quando, per ogni $A\in\Im$, se $\mu(A) = 0$ allora $v(A)=0$.

Quando questa condizione risulta soddisfatta allora la funzione $\xi(z_t)$ esiste e può essere utilizzata per passare da $d\tilde{P}$ a dP e viceversa. In questo caso le due misure sono dette *misure equivalenti di probabilità*.

A questo proposito, il teorema di Girsanov fornisce le condizioni di esistenza della derivata di Radon-Nikodym nel caso di processi stocastici continui. Per introdurre il teorema nella sua forma più generale, occorre preliminarmente definire alcuni elementi (Neftci, 1996; Karatzas e Shreve, 1988).

Sia data una famiglia di σ-algebre $\{\Im_t\}$ con t $\in$ [0,T] e T finito. Su tale intervallo sia definito un processo $\{\xi_t\}$, espresso nella forma seguente:

$$\xi_t = e^{\left(\int_0^t X_u dW_u - 1/2 \int_0^t X_u^2 du \right)} \qquad [14]$$

dove $\{X_t\}$ è un processo che assume valori noti quanto ci si trova in t, ovvero è $\Im_t$-misurabile, mentre $\{W_t\}$ è un processo di Wiener[5] con distribuzione di probabilità P Valga, inoltre, la seguente condizione tecnica di limitatezza, o condizione di Novikov:

$$E\left[e^{\int_0^t X_u^2 du} \right] < \infty \qquad [15]$$

Essa implica che X_t non deve crescere o decrescere troppo velocemente nel tempo.

Teorema 2.3.3 (di Girsanov): Se il processo $\{\xi_t\}$ è una martingala rispetto a $\{\Im_t\}$, allora esiste un processo definito come:

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_u du$$

il quale gode delle proprietà del processo di Wiener e che ha misura di probabilità data da:

$$\tilde{P}_t(A) = E^P[1_A \xi_T]$$

[5] Un *processo di Wiener*, o *moto browniano*, è un processo stocastico $\{X_t\}$, t ≥ 0, che gode delle seguenti proprietà:

- $X_0=0$;
- $\{X_t\}$, t ≥ 0, ha incrementi stazionari ed indipendenti;
- per ogni t > 0, X_t è distribuito secondo una normale di media 0 e varianza σ^2t.

Quando σ = 1, si ha un *moto browniano standard*. Dal momento che la media di un processo di Wiener è nulla, esso si presenta come un processo a traiettorie irregolari.

in cui A è un evento appartenente a $\{\Im_t\}$ e 1_A è una funzione indicatrice dell'evento A (Kopp, 1984).

Questo complesso teorema implica che moltiplicando la misura di probabilità P che governa il processo $\{W_t\}$ per la funzione ξ_t, tramite l'operazione di valore atteso, si ottiene una nuova distribuzione di probabilità $\tilde{P}$, sottostante il processo $\{\tilde{W}_t\}$. La relazione tra i due processi è definita nel teorema. In termini differenziali si ha che :

$$d\tilde{W}_t = dW_t - X_t dt \qquad [16]$$

In questa espressione il passaggio da un processo all'altro è ottenuto sottraendo da W_t un trend variabile nel tempo. La trasformazione della misura di probabilità tale da modificare la media, lasciando inalterata la varianza e i valori assunti dalla variabile aleatoria è quindi un processo dipendente dal tempo che si svolge istante per istante. In ogni istante varia l'elemento tendenziale da considerare per effettuare tale trasformazione.

La funzione indicatrice 1_A assume valore unitario se si verifica l'evento A, assume il valore zero altrimenti. Il valore atteso può essere riscritto sotto forma di integrale dal momento che si opera in un contesto continuo:

$$\tilde{P}(A) = \int_A \xi_t dP \qquad [17]$$

e differenziando si ha:

$$d\tilde{P}_t = \xi_t dP \qquad [18]$$

da cui si può verificare come il teorema di Girsanov sia consistente con la descrizione della funzione ξ_t come rapporto di due misure di probabilità equivalenti.

3. Applicazioni della teoria delle martingale in Finanza

In questa parte del lavoro verranno presentati alcuni casi esemplificativi dai quali emerge la grande adattabilità dei concetti legati alla teoria delle martingale alle problematiche di ordine finanziario. Si soffermerà l'attenzione soprattutto sull'opportunità di ricorrere all'uso delle martingale per rappresentare i processi di formazione dei prezzi sia degli strumenti derivati che dei titoli sottostanti con l'obbiettivo di verificare fino a che punto tale modellistica si mantenga coerente col funzionamento dei mercati finanziari e con la struttura dei comportamenti degli agenti economici (Lamberton e Lapeyre, 1996).

3.1. Applicazione 1: futures pricing

Nell'applicazione di seguito riportata si cerca di dimostrare come sotto certe condizioni i prezzi dei *futures* costituiscano una martingala (Duffie, 1989; Samuelson, 1965).

Sia $X_t, X_{t+1},\ldots,X_{t+\tau}$ una sequenza temporale di prezzi (*spot prices*) di un qualche bene rispetto al quale si può pensare di strutturare un contratto future. X_t rappresenta il prezzo corrente mentre $X_{t+\tau}$ denota il prezzo che prevarrà dopo τ unità di tempo da oggi.

Si assuma che gli agenti economici conoscano tanto il prezzo attuale quanto quelli passati (cioè le diverse realizzazioni del processo). In termini probabilistici si tratta di ritenere che gli agenti economici abbiano a disposizione tutte le possibili informazioni generate dal processo. Richiamare la definizione di martingala, ed in particolare la proprietà di *monotonicità*, significa concretamente supporre che l'informazione disponibile si accresce nel tempo secondo un processo noto come di *learning without forgetting* (Samuelson, 1965).

Se si indica con $\mathfrak{I}_t$ la σ-algebra che contiene tutte le informazioni circa l'andamento dei prezzi fino al tempo t, per quanto detto, si avrà che:

$$\mathfrak{I}_{t-k} \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{I}_{t-1} \subset \mathfrak{I}_t \qquad [19]$$

Particolarmente interessante appare definire, oltre che il suo contenuto probabilistico, il significato economico di $\mathfrak{I}_t$ (Vaciago e Verga, 1994; Fama, 1970). A tal proposito pare opportuno ricordare la classificazione, effettuata da Fama (1970), circa i diversi livelli di efficienza informativa dei mercati finanziari. In generale si parla di efficienza informativa quando in ogni momento i prezzi dei titoli riflettono pienamente ed in modo corretto tutte le informazioni disponibili. In particolare Fama distingue tra:

- *efficienza debole*, se i prezzi riflettono solo le informazioni che si possono estrarre dall'andamento passato dei prezzi,
- *efficienza semi-forte*, se i prezzi riflettono anche le informazioni disponibili a tutti;
- *efficienza forte*, se i prezzi incorporano pure le informazioni disponibili a pochi (insiders);

Il modello in questione, coerentemente con i risultati delle verifiche empiriche volte a constatare i livelli di efficienza dei mercati finanziari, assume che $\{\Im_t\}$ contenga informazioni in forma debole che garantiscano la misurabilità di $\{X_t\}$ (Fama, 1970).

Il prezzo di un *futures* è determinato dalle leggi della domanda e dell'offerta come ogni altro prezzo. Si indichi con $Y(\tau, t)$ la quotazione del *futures* al tempo t specificando con τ l'insieme delle unità di tempo che intercorrono tra il momento dell'acquisto del *futures* e la data di consegna. Col trascorrere del tempo si avrà una successione di prezzi *futures*:

$$Y(\tau, t), Y(\tau\text{-}1, t+1)\ldots\ldots Y(\tau\text{-}n, t+n)\ldots\ldots Y(1, t+\tau\text{-}1) \qquad [20]$$

Se si assume (Samuelson, 1965; Muth, 1961) che il prezzo *futures* si muoverà verso l'alto o verso il basso solo se mutano le aspettative del mercato sul futuro prezzo *spot* del bene sottostante, allora è ragionevole pensare che il prezzo del *futures* sia uguale al valore atteso del futuro prezzo *spot*:

$$Y(\tau, t)=E[X_{t+\tau} \mid \Im_t] \qquad [21]$$

Si tratta adesso di dimostrare che la successione dei prezzi *futures* è una martingala. Per far ciò basterà verificare il rispetto delle proprietà fondamentali enunciate all'interno della definizione di martingala.

Occorre, innanzitutto, notare che la integrabilità e la misurabilità di $\{Y(\tau,t)\}$ seguono dall'espressione (21): $X_{t+\tau}$ è infatti integrabile poiché, come è ragionevole supporre, i prezzi dei beni assumono valori finiti, ed inoltre $E[X_{t+\tau} \mid \Im_t]$ risulta essere $\Im_t$–misurabile.

La proprietà di monotonicità è anch'essa verificata dato che le σ-algebre associate alla successione dei prezzi *futures* costituiscono esse stesse una sequenza monotona crescente:

$$\Im_t \subset \Im_{t+1} \subset \ldots\ldots \subset \Im_{t+n} \subset \ldots\ldots \subset \Im_{t+T-1} \qquad [22]$$

A questo punto rimane da dimostrare la proprietà in base alla quale:

$$E[Y(\tau\text{-}1, t+1) \mid \Im_t]=Y(\tau, t) \qquad [23]$$

Dalla (21) si deduce che:

$$Y(\tau\text{-}1, t+1)=E[X_{t+\tau} \mid \Im_{t+1}] \qquad [24]$$

e sostituendo tale espressione nella parte sinistra della (23) si ha che:

$$E[E[X_{t+\tau} \mid \Im_{t+1}] \mid \Im_t]=E[X_{t+\tau} \mid \Im_t] \qquad [25]$$

Sulla base dalla (21), la (23) risulta verificata, e quindi la successione dei prezzi *futures* può considerarsi, tenuto conto delle ipotesi sottostanti al modello, un processo stocastico martingala (Samuelson, 1965).

L'applicazione appena illustrata può essere interpretata sulla base dell'andamento, empiricamente osservabile, dei prezzi *futures* all'approssimarsi della data di consegna. Prima di questo momento il prezzo *futures* può risultare minore o maggiore del prezzo *spot* dell'attività sottostante. All'avvicinarsi della scadenza del contratto il prezzo *futures* convergerà verso il prezzo *spot*, delineando delle traiettorie irregolari (Hull, 1989).

Una questione interessante è se il prezzo *futures* si collochi sopra o sotto l'aspettativa del futuro prezzo *spot*. La situazione in cui il prezzo *futures* è inferiore al valore atteso del futuro prezzo *spot* è nota come 'deporto' o *normal backwardation* (Hull, 1989). In questo caso si dovrebbe dimostrare che la sequenza $\{Y(\tau,t)\}$ sia una submartingala. Per far ciò occorre sfruttare un'assunzione (Samuelson, 1965) in base alla quale, in luogo della (21), si ipotizza che il prezzo *futures* si ottenga, scontando ad un opportuno tasso r il valore del prezzo *spot* atteso dopo τ-unità di tempo dalla data corrente:

$$Y(\tau, t)=\alpha^{\tau}E[X_{t+\tau} \mid \Im_t] \qquad [26]$$

essendo $\alpha^{\tau}=(1+r)^{-\tau}$ il fattore di attualizzazione.

Per dimostrare che la successione$\{Y(\tau,t)\}$ è una submartingala, dalla (26) si ha che:

$$E[Y(\tau\text{-}1, t+1)|\Im_t]=E[\alpha^{\tau-1}E[X_{t+\tau}|\Im_{t+1}]|\Im_t]=$$

$$=\alpha^{\tau-1}E[E[X_{t+\tau}|\Im_{t+1}]|\Im_t]= \alpha^{\tau-1}E[X_{t+\tau}|\Im_t]=$$

$$=\alpha^{\tau-1}\ \alpha^{-\tau}Y(\tau,t)= \alpha^{-1}Y(\tau,t)=$$

$$=(1+r)Y(\tau,t)\geq Y(\tau,t) \qquad [27]$$

il che dimostra che solo le particolari assunzioni fatte, la sequenza di prezzi *futures* si modellizza come un processo a traiettorie crescenti.

3.2. Applicazione 2: Approccio stocastico per la valutazione di una azione: quali condizioni per la definizione di un processo martingala?

In questa applicazione si vuol dimostrare come, sotto certe condizioni, se il valore di un'azione viene determinato sulla base del valore attuale del flusso dei dividendi futuri attesi (Samuelson, 1965), la successione nel tempo dei valori così ottenuti costituisce una martingala. Si vedrà, inoltre, come il ruolo delle aspettative individuali risulti fondamentale ai fini della caratterizzazione del processo stocastico.

Sia $\{X_t\}$, t $\geq$ 0 la successione dei dividendi di una data azione, pagati rispettivamente al tempo *t*. Si supponga che il tasso al quale vengono scontati tali dividendi sia costante e pari a r.

Se le variabili $\{X_t\}$, t $\geq$ 0, fossero deterministiche, si potrebbe affermare che il valore dell'azione al tempo t è ottenibile sommando i valori attuali dei dividendi futuri, cioè:

$$V_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau}} \qquad [28]$$

Analogamente si può ottenere il valore dell'azione per il periodo successivo:

$$V_{t+1} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{X_{t+1+\tau}}{(1+r)^{\tau}} = \sum_{\tau=2}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau-1}} \qquad [29]$$

Dalla (28) e dalla (29) segue che:

$$V_t - \frac{V_{t+1}}{1+r} = \frac{X_{t+1}}{1+r}, \qquad [30]$$

ovvero

$$V_{t+1}=(1+r)V_t - X_{t+1} \qquad [31]$$

Questa equazione esprime il valore dell'azione per il periodo successivo come funzione del valore corrente, del tasso di sconto supposto fisso e del dividendo ottenibile alla fine del prossimo periodo.

Considerando i dividendi come una successione di variabili aleatorie rispetto alle quali è possibile definire una distribuzione di probabilità, nonché il loro valore atteso condizionale, allora anche la sequenza $\{V_t\}$ figurerebbe come processo stocastico. L'obiettivo è quello di verificare sotto quali condizioni tale processo è una martingala.

Ipotizzando che gli investitori conoscano la successione dei dividendi percepiti fino al tempo corrente t, è possibile generalizzare la (28) scrivendo:

$$v_t \equiv E[V_t \mid \Im_t] = E\left[\sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau}} \middle| \Im_t\right] = \sum_{\tau=1}^{\infty} \left(E\left[\frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau}} \middle| \Im_t \right] \right) \qquad [32]$$

ed analogamente a quanto fatto sopra, nel caso deterministico, si calcola il valore atteso del prezzo equo dell'azione al tempo *t+1*, v_{t+1} :

$$v_{t+1} \equiv E[V_{t+1} \mid \Im_{t+1}] = E\left[\sum_{\tau=2}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau-1}} \middle| \Im_{t+1}\right] \qquad [33]$$

Dalla (32) e (33) deriva che:

$$E[v_{t+1} \mid \Im_t] = E\left[E\left[\sum_{\tau=2}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau-1}} \middle| \Im_{t+1} \right] \middle| \Im_t \right] =$$

$$= E\left[\sum_{\tau=2}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau-1}} \middle| \Im_t \right] = E\left[-X_{t+1} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau-1}} \middle| \Im_t \right]. \qquad [34]$$

da cui si ricava, ricordando la definizione di v_t:

$$E[v_{t+1} \mid \Im_t] = (1+r)E\left[\sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{X_{t+\tau}}{(1+r)^{\tau}} \middle| \Im_t \right] - E\left[X_{t+1} \middle| \Im_t \right]$$

$$= (1+r)v_t - E\left[X_{t+1} \middle| \Im_t \right]. \qquad [35]$$

La (35) rappresenta la generalizzazione stocastica della (31) e può essere utilizzata per capire in quali casi la sequenza $v_t \ldots v_{t+\tau}$ è una martingala, ovvero si verifica che:

$$E[v_{t+1} \mid \Im_t] = v_t \qquad [36]$$

La precedente condizione si realizza quando

$$rv_t = E\left[X_{t+1} \middle| \Im_t \right] \qquad [37]$$

da cui:

$$r = \frac{E\left[X_{t+1} \middle| \Im_t \right]}{v_t} \qquad [38]$$

Nei casi in cui l'uguaglianza non venga rispettata si potrebbe pensare a $\{v_t\}$ come ad un processo crescente o decrescente. In particolare se:

$$r \leq \frac{E\left[X_{t+1} \middle| \Im_t \right]}{v_t} \qquad [39]$$

allora si configurerebbe una submartingala, infatti si ha che:

$$E[v_{t+1} \mid \Im_t] = v_t + \left(r - \frac{E[X_{t+1} \mid \Im_t]}{v_t} \right) v_t \geq v_t \qquad [40]$$

Per concludere, si fa osservare che l'ipotesi di considerare un valore atteso condizionale oggettivo mal si presta a rappresentare il funzionamento dei mercati finanziari per quanto concerne in modo particolare la loro efficienza valutativa. Si vuole cioè affermare che il valore atteso condizionale avrebbe un'origine più complessa rispetto a quella che gli è stata attribuita: dovrebbe sintetizzare le aspettative razionali soggettive poiché da esse dipendono le imprevedibili dinamiche di mercato. Queste, spesso, possono assumere andamenti tali da mettere in serio dubbio l'efficienza valutativa dei mercati stessi (Vaciago e Verga, 1994). A questo punto si può dire che l'effetto congiunto delle aspettative individuali e soprattutto i contesti in cui si formano (*bad or beauty context*) caratterizzerebbero la natura del processo stocastico sottostante la dinamica di formazione dei valori finanziari.

3.3. Applicazione 3: scomposizione di Dobb-Meyer applicata alla valutazione di una call option

Un'opzione *call* conferisce al possessore il diritto di acquistare il titolo sottostante ad un prezzo d'esercizio prestabilito o *strike price*. Il prezzo pagato dal compratore al venditore di un'opzione, per acquisirne il diritto relativo, si chiama *premio*.

Indicando con K il prezzo d'esercizio dell'opzione *call* e con S_T il prezzo effettivo a scadenza del titolo sottostante, è evidente che in T si avranno due possibili situazioni:

1) $S_T \leq K$: in questo caso non è conveniente esercitare l'opzione. Essa viene abbandonata ed il profitto alla scadenza è pari a zero.
2) $S_T \geq K$: in questo caso è conveniente esercitare l'opzione, conseguendo un profitto pari a S_T-K.

In sintesi il *pay-off* a scadenza dell'opzione *call* indicato con C_T sarà:

$$C_T = max[S_T - K, 0]; \qquad [41]$$

Dal momento che il prezzo S_T non è noto in t, occorre considerare il valore atteso:

$$E^P[C_T|F_t] = E^P[max[S_T - K, 0] | \Im_t] \qquad [42]$$

essendo P la distribuzione di probabilità che governa il movimento dei prezzi.

Data tale previsione ci si potrebbe chiedere se il più equo valore della *call* al tempo t possa considerarsi uguale al valore scontato di $E^P[max[S_T - K, 0] | \Im_t]$.

Fissato il tasso di attualizzazione r si tratta di verificare che:

$$C_t = e^{-r(T-t)} E^P[max[S_T - K, 0] | \Im_t] \qquad [43]$$

da cui segue che:

$$E^P[e^{-r(T-t)}C_T\,|\,\mathfrak{I}_t] = C_t \qquad [44]$$

e:

$$E^P[e^{-rT}C_T\,|\,\mathfrak{I}_t] = e^{-rt}C_t \qquad [45]$$

in cui t<T.

Quest'ultima uguaglianza dipende dal fatto che il processo $\{e^{-rt}C_t\}$, t ≥ 0, sia o meno una martingala data $\mathfrak{I}_t$ e sotto la distribuzione di probabilità P.

Dal momento che il prezzo della *call* viene definito sulla base del prezzo del titolo sottostante, si può affermare che la dinamica del processo $\{e^{-rt}C_t\}$ segue quella del processo $\{S_t\}$e quindi di $\{e^{-rt}S_t\}$.

Come specificato in nota 2 nella realtà finanziaria il processo sottostante i prezzi di titoli azionari non si comporta come una martingala. È comprensibile come titoli più rischiosi avranno scontato oggi un premio tanto maggiore quanto maggiore è il loro rischio.

In termini formali si può scrivere:

$$E[e^{-rT}S_T\,|\,\mathfrak{I}_t] > e^{-rt}S_t \qquad [46]$$

ovvero i prezzi sono delle *sub-martingale*.

Sfruttando però il teorema di scomposizione di Doob-Meyer è sicuramente possibile decomporre in maniera univoca $\{e^{-rt}S_t\}$ nella somma di una martingala M_t e di una successione non decrescente di variabili aleatorie A_t.:

$$e^{-rt}S_t = A_t + M_t \qquad [47]$$

Una volta ricavata la *trend-line* A_t è possibile utilizzare la scomposizione (47) al fine di ricavare il processo martingala M_t tramite il quale è possibile definire il valore di mercato di una *call option* al tempo t. Infatti si ha che per la definizione martingala:

$$E^P[e^{-rT}S_T-A_T|\mathfrak{I}_t] = e^{-rt}S_t-A_t \qquad [48]$$

da cui si deduce che il processo $\{e^{-rt}S_t-A_t\}$, depurato dall'effetto tendenziale di lungo periodo, è una martingala. Questa correzione nel processo del prezzo del titolo azionario garantisce la stazionarietà nel processo che definisce la dinamica del valore di una *call*. In tal modo si può sfruttare la relazione [43] per ipotizzare il prezzo equo dell'opzione *call* al tempo t.

In realtà, questo metodo, data la difficoltà implicita nella stima di A_t, è raramente seguito nella pratica. È più conveniente convertire i prezzi in una martingala non sottraendo il loro trend ma cambiando la distribuzione di probabilità sottostante. Questa tecnica verrà illustrata nella successiva applicazione 4.

3.4. Applicazione 4: utilizzo delle misure equivalenti di probabilità nella valutazione delle attività finanziarie

Con questo esempio si vuole evidenziare come nella valutazione dei prezzi delle attività finanziarie si utilizzi la trasformazione delle misure di probabilità sottostanti per convertire dei processi che non sono martingale, in martingale.

Sia $\{Y_t\}$ un processo di Wiener generalizzato[6] a tempo continuo con distribuzione normale $N(\mu t, \sigma^2 t)$ con Y_0 dato per il tempo t_0. Sia $\{S_t\}$ il processo di tipo geometrico che rappresenta la dinamica di un'attività finanziaria:

$$S_t = S_0 e^{y_t} \qquad [49]$$

La funzione generatrice dei momenti di $\{Y_t\}$ assume la forma della funzione generatrice dei momenti di una normale, ovvero:

$$M(\lambda) = E[e^{\lambda Y_t}] = e^{\lambda\mu t + 1/2\sigma^2 t\lambda^2} \qquad [50]$$

Se si considerano gli incrementi del processo $\{Y_t\}$, indicati con $\Delta Y_t = Y_{t+\tau} - Y_t$ con $\tau > 0$, si ha che la distribuzione è ancora una normale (Nefci, 1996):

$$\Delta Y_t \sim N[\mu\tau, \sigma^2\tau], \qquad [51]$$

La funzione generatrice dei momenti relativa a ΔY_t sarà la seguente:

$$M(\lambda) = e^{\lambda\mu\tau + 1/2\sigma^2\lambda^2\tau} \qquad [52]$$

Al fine di pervenire alla definizione di una formula che esprima il valore atteso condizionato di un processo geometrico, sulla base delle espressioni delle funzioni

[6] Per processo di Wiener generalizzato si intende un processo stocastico browniano con media non nulla.

generatrici dei momenti, si definisca il valore atteso condizionato del rapporto tra i prezzi dell'*asset,* rispettivamente al tempo $t+\tau$ e t. Si ha che:

$$E[S_{t+\tau}/S_t \mid \Im_t]$$

$$= E[e^{\Delta Yt} \mid \Im_t]$$

$$= E[e^{\Delta Yt}]$$

$$= e^{\mu\tau+1/2\sigma 2\tau} \qquad [53]$$

in cui il terzo passaggio è giustificato dalla definizione del processo di Wiener che prevede incrementi stazionari ed indipendenti.

Moltiplicando semplicemente da ambo i lati per S_t si ottiene un'espressione del valore atteso di $S_{t+\tau}$ nella forma seguente:

$$E[S_{t+\tau}|\Im_t] = S_t e^{\mu\tau+1/2\sigma_2\tau} \qquad [54]$$

Questa uguaglianza viene normalmente utilizzata nell'ambito della valutazione dei prezzi di attività finanziarie.

La distribuzione del processo del prezzo $\{S_t\}$, determinata da quella di $\{Y_t\}$, è indicata con P, e rappresenta la "vera" legge di probabilità che governa gli *shock* sui prezzi. Non sempre questa misura di probabilità è necessariamente quella più conveniente da utilizzare. Sulla base del *teorema di Girsanov* risulta, infatti, possibile trovare una misura di probabilità equivalente ($\tilde{P}$) a quella data, tale da rendere più agevole la valutazione dei prezzi del titolo. Questo è vero, in particolare, se si può operare con misure di probabilità le quali rendono possibile la conversione dei prezzi in una martingala (Karatzas e Shreve, 1988).

Data la rischiosità cui un titolo è normalmente soggetto, il valore scontato al tasso r, *risk free*, non corrisponde al prezzo valutato in t, a causa dell'esistenza di un premio per il rischio, il quale rappresenterebbe un elemento residuale non incorporato nel tasso di sconto. Questo può essere espresso in termini formali nel modo seguente:

$$e^{-r\tau}E^P[S_{t+\tau}|\Im_t] > S_t \qquad [55]$$

da cui segue che:

$$E^P[e^{-r(t+\tau)}S_{t+\tau}|\Im_t] > e^{-rt}S_t \qquad [56]$$

ciò equivale a dire che il processo $\{Z_t\}=\{e^{-rt}S_t\}$, per ogni t>0, è una sub-martingala.

L’idea è quella di trovare una distribuzione di probabilità equivalente a quella data tale per cui il processo $\{Z_t\}$ risulta una martingala[7], e quindi:

$$E^{\tilde{P}}[e^{-r(t+\tau)}S_{t+\tau}|\Im_t] = e^{-rt}S_t \qquad [57]$$

La distribuzione di $\{Y_t\}$, la cui dinamica rappresenta l’elemento determinante il prezzo dell’attività finanziaria, è una normale $N(\mu t,\ \sigma^2 t)$. Si può allora pensare di definire un “nuova” distribuzione $\tilde{P}$ del tipo:

$$N(\rho t,\ \sigma^2 t) \qquad [58]$$

in cui l’elemento che definisce la media risulta arbitrariamente modificato, mentre resta costante la varianza.

Usando l’espressione [54], il valore atteso condizionale del prezzo attualizzato diviene:

$$E^{\tilde{P}}[e^{-r\tau}S_{t+\tau}|\Im_t] = [S_t e^{-r\tau}]e^{\rho\tau+1/2\sigma_2\tau} \qquad [59]$$

Dato che il parametro ρ è arbitrario, esso può essere scelto in modo tale che il precedente valore atteso calcolato tramite $\tilde{P}$ sia una martingala. Una volta scelto il parametro ρ come:

$$\rho = r - 1/2\sigma^2 \qquad [60]$$

si ha:

$$E^{\tilde{P}}[e^{-r\tau}S_{t+\tau}|\Im_t] = S_t \qquad [61]$$

e quindi:

$$E^{\tilde{P}}[e^{-r(t+\tau)}S_{t+\tau}|\Im_t] = e^{-rt}S_t. \qquad [62]$$

Determinando un valore opportuno di ρ come nella (60) si ottiene, quindi, una distribuzione sulla base della quale il processo identificato dall’andamento dei prezzi è una martingala (Nefci, 1996). Questo rende possibile il calcolo del prezzo attuale del titolo mantenendo come tasso di attualizzazione il tasso *risk-free*, normalmente conosciuto e facilmente reperibile.

La nuova distribuzione di probabilità, rispetto a quella vera, differisce soltanto per il valore assunto dalla media mentre la varianza (e dunque il grado di volatilità dei prezzi) rimane inalterata.

---

[7] Tale risultato emerge dal fatto che si utilizza nell’attualizzazione un tasso *risk-free* in un contesto non neutralizzato per il rischio. Il ruolo svolto dalla distribuzione equivalente di probabilità è proprio quello di rendere la dinamica delle grandezze finanziarie neutrale rispetto alla misura del rischio.

4. Conclusioni

Con questo lavoro si è tentato di dimostrare la notevole flessibilità della teoria delle martingale rispetto all'esigenza di modellizzazione, in termini probabilistici, delle problematiche di ordine finanziario. Si è fatto rilevare, inoltre, sotto quali condizioni, principi di coerenza e congruenza con la dinamica reale dei mercati finanziari inducano a modificare la natura di processi sottostanti. In primo luogo si è evidenziata l'adattabilità delle martingale alla modellizzazione del comportamento dei prezzi di attività finanziarie. In secondo luogo, è stato dato risalto alla possibilità che, sotto determinate condizioni, i prezzi degli *assets* finanziari non si comportino come martingale, bensì come sub/martingale. In tale contesto, si propone l'esigenza di trasformare processi in media crescenti (o decrescenti) in martingale. Le proposte in questo senso assumono una duplice configurazione. Come prima soluzione può essere utilizzato il procedimento di scomposizione di sub-martingale di Doob-Meyer. Alternativamente, può essere applicato il metodo di trasformazione della misura sottostante di probabilità. Mentre il primo procedimento risulta complicato dalla necessità di stimare un processo in media crescente, il secondo pare beneficiare del vantaggio offerto dall'utilizzo di un tasso *risk-free* per l'attualizzazione delle grandezze finanziarie. Per garantire tale possibilità è necessario riconfigurare la distribuzione di probabilità sottostante il processo dinamico dei prezzi al fine di pervenire ad una neutralizzazione della dimensione di rischio implicito.

Appendice A: Dimostrazione del teorema di Doob-Meyer

a) Esistenza della scomposizione

Si definisca $d_0 = X_0$, $d_j = X_j - E[X_j|\Im_{j-1}]$ per ogni $j \geq 1$. Si ha che:

$$S_t = \sum_{j=0}^{t} d_j \qquad [A.1]$$

è una martingala.

Si definisca un processo generico $\{A_t\}$, t ≥ 0 che rappresenti il residuo di $\{X_t\}$, una volta che è stato sottratto il processo martingala $\{S_t\}$:

$$A_t = X_t - S_t \qquad [A.2]$$

Quindi segue che:

$$A_0 = X_0 - S_0 = X_0 - X_0 = 0 \qquad [A.3]$$

e

$$\begin{aligned} & A_{t+1} - A_t \\ & = X_{t+1} - S_{t+1} - X_t + S_t \\ & = X_{t+1} - X_t - (S_{t+1} - S_t) \\ & = Xt_{+1} - X_t - d_{t+1} \\ & = X_{t+1} - X_t - X_{t+1} + E[X_{t+1}|\Im_t] \\ & = E[X_{t+1}|\Im_t] - X_t \geq 0 \end{aligned} \qquad [A.4]$$

in cui l'ultimo passaggio è giustificato dalla proprietà di martingala.

Poiché:

$$A_{t+1} = \sum_{j=0}^{t} (A_{j+1} - A_j) = \sum_{j=0}^{t} (E(X_{j+1} | \Im_j) - X_j) \in \Im_t \qquad [A.5]$$

si deduce che la successione di variabili aleatorie $\{A_t\}$ è prevedibile e quindi è crescente.

Si può verificare che sommando $\{A_t\}$ a $\{M_t\}$ si ottiene proprio $\{X_t\}$, la submartingala.

b) Unicità della scomposizione

Supponiamo $X_t = S_t + A_t$, e che vi sia un'altra scomposizione diversa dalla precedente $X_t = S'_t + A'_t$, dove $\{S'_t\}$ è una martingala e $\{A'_t\}$ è un processo crescente. Allora segue che:

$$A'_n = X_n - S'_n, \qquad [A.6]$$

$$A_n = X_n - S_n, \qquad [A.7]$$

e, anche la (A.6) e (A.7):

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n - (S'_{n+1} - S'_n). \qquad [A.8]$$

Poiché $\{A'_t\}$ è prevedibile e $\{S'_t\}$ è una martingala, segue che:

$$A'_{t+1} - A'_t = E[A'_{t+1} - A'_t|\mathfrak{I}_t] = E[X_{t+1}|\mathfrak{I}_t] - X_t, \qquad [A.9]$$

e

$$A_{t+1} - A_t = E[A_{t+1} - A_t|\mathfrak{I}_t] = E[X_{t+1}|\mathfrak{I}_t] - X_t. \qquad [A.10]$$

Posto che $A_0 = A'_0$, e che gli scarti dei processi crescenti $\{A'_t\}$ e $\{A_t\}$ tra un periodo e quello immediatamente precedente sono uguali, segue che:

$$\begin{aligned} A_t &= A_0 + (A_1 - A_0) + \ldots + (A_t - A_{t-1}) \\ &= A'_0 + (A'_1 - A'_0) + \ldots + (A'_t - A'_{t-1}) = A'_t. \end{aligned} \qquad [A.11]$$

Quindi:

$$S_t = X_t - A_t = X_t - A'_t = S'_t. \qquad [A.12]$$

Con questo è dimostrato che la scomposizione non solo esiste ma è anche unica.

Bibliografia

Billingsley P., 1979, *Probability and Measure*, John Wiley, New York.

Breiman L., 1992, *Probability*, SIAM, Philadelphia.

Dall'Aglio G, 1987, *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, Bologna.

De Finetti B., 1970,*Teoria delle probabilità, sintesi introduttiva con appendice critica*, Einaudi, Torino.

Duffie D., 1989, *Futures Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York.

Elliot R.J., 1982, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, New York.

Fama E.F., 1970, "Efficent Capital Markets:a review of theory and empirical work", *Journal of Finance*, 25, pp.383-417.

Galeotti P, 1984, *Elementi di probabilità e statistica*, Levrotto & Bella, Torino.

Hull J.C., 1989, *Options, Futures and Others Derivative Securities*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York.

Karatzas I., Shreve S.E., 1988, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York.

Kingman J.F.C., Taylor S.J., 1966, *Introdution to Measure and Probability*, Cambridge University Press, Londra.

Kopp P.E., 1984, *Martingales and stochastic Integrals*, Cambridge University. Press, Cambridge.

Lamberton D., Lapayre B., 1996, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, Londra.

Lindley D.V., 1965, *Introdution to Probability and Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Loève M., 1978, *Probability Theory*, Springer-Verlag, New York.

Musiela M., Rutkowski, 1997, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlino.

Muth J.F., 1961, "Rational expectations and the theory of price movement", *Econometrica*, 29, pp.315-335.

Nefci S. N., 1996, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, Londra.

Parzen E., 1962, *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco.

Piccolo D., Vitale C., 1984, *Metodi statistici per l'analisi economica*, Il Mulino, Bologna;

Resnick I.S., 1999, *A Probability Path*, Birkhauser, Boston.

Samuelson P.A., 1965, "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly", *Industrial Management Review*, 6, pp.41-49.

Vaciago G, Verga G., 1994, *Efficienza e Stabilità dei Mercati Finanziari*, Il Mulino, Bologna.

Williams D., 1991, *Probability with Martingales*, Cambridge University. Press, Cambridge.

WORKING PAPER SERIES (2001-1993)

2001

1/01 *Competitività e divari di efficienza nell'industria italiana*, by Giovanni Fraquelli, Piercarlo Frigero and Fulvio Sugliano, January

2/01 *Waste water purification in Italy: costs and structure of the technology*, by Giovanni Fraquelli and Roberto Giandrone, January

3/01 SERIE SPECIALE IN COLLABORAZIONE CON HERMES. *Il trasporto pubblico locale in Italia: variabili esplicative dei divari di costo tra le imprese*, by Giovanni Fraquelli, Massimiliano Piacenza and Graziano Abrate, February

4/01 *Relatedness, Coherence, and Coherence Dynamics: Empirical Evidence from Italian Manufacturing*, by Stefano Valvano and Davide Vannoni, February

5/01 *Il nuovo panel Ceris su dati di impresa 1977-1997,* by Luigi Benfratello, Diego Margon, Laura Rondi, Alessandro Sembenelli, Davide Vannoni, Silvana Zelli, Maria Zittino, October

6/01 *SMEs and innovation: the role of the industrial policy in Italy*, by Giuseppe Calabrese and Secondo Rolfo, May

7/01 *Le martingale: aspetti teorici ed applicativi*, by Fabrizio Erbetta and Luca Agnello, September

8/01 *Prime valutazioni qualitative sulle politiche per la R&S in alcune regioni italiane*, by Elisa Salvador, October

9/01 *Accords technology transfer-based: théorie et méthodologie d'analyse du processus*, *by Mario Coccia,* October

10/01 *Trasferimento tecnologico: indicatori spaziali,* by Mario Coccia, November

11/01 *Does the run-up of privatisation work as an effective incentive mechanism? Preliminary findings from a sample of Italian firms*, by Fabrizio Erbetta, October

12/01 SERIE SPECIALE IN COLLABORAZIONE CON HERMES. *Costs and Technology of Public Transit Systems in Italy: Some Insights to Face Inefficiency*, by Giovanni Fraquelli, Massimiliano Piacenza and Graziano Abrate, October

13/01 *Le NTBFs a Sophia Antipolis, analisi di un campione di imprese*, by Alessandra Ressico, December

2000

1/00 *Trasferimento tecnologico: analisi spaziale,* by Mario Coccia, March

2/00 *Poli produttivi e sviluppo locale: una indagine sulle tecnologie alimentari nel mezzogiorno,* by Francesco G. Leone, March

3/00 *La mission del top management di aziende sanitarie,* by Gian Franco Corio, March

4/00 *La percezione dei fattori di qualità in Istituti di ricerca: una prima elaborazione del caso Piemonte,* by Gian Franco Corio, March

5/00 *Una metodologia per misurare la performance endogena nelle strutture di R&S,* by Mario Coccia, April

6/00 *Soddisfazione, coinvolgimento lavorativo e performance della ricerca,* by Mario Coccia, May

7/00 *Foreign Direct Investment and Trade in the EU: Are They Complementary or Substitute in Business Cycles Fluctuations?*, by Giovanna Segre, April

8/00 *L'attesa della privatizzazione: una minaccia credibile per il manager?*, by Giovanni Fraquelli, May

9/00 *Gli effetti occupazionali dell'innovazione. Verifica su un campione di imprese manifatturiere italiane*, by Marina Di Giacomo, May

10/00 *Investment, Cash Flow and Managerial Discretion in State-owned Firms. Evidence Across Soft and Hard Budget Constraints*, by Elisabetta Bertero and Laura Rondi, June

11/00 *Effetti delle fusioni e acquisizioni: una rassegna critica dell'evidenza empirica*, by Luigi Benfratello, June

12/00 *Identità e immagine organizzativa negli Istituti CNR del Piemonte*, by Paolo Enria, August

13/00 *Multinational Firms in Italy: Trends in the Manufacturing Sector*, by Giovanna Segre, September

14/00 *Italian Corporate Governance, Investment, and Finance*, by Robert E. Carpenter and Laura Rondi, October

15/00 *Multinational Strategies and Outward-Processing Trade between Italy and the CEECs: The Case of Textile-Clothing*, by Giovanni Balcet and Giampaolo Vitali, December

16/00 *The Public Transit Systems in Italy: A Critical Analysis of the Regulatory Framework*, by Massimiliano Piacenza, December

1999

1/99 *La valutazione delle politiche locali per l'innovazione: il caso dei Centri Servizi in Italia,* by Monica Cariola and Secondo Rolfo, January

2/99 *Trasferimento tecnologico ed autofinanziamento: il caso degli Istituti Cnr in Piemonte,* by Mario Coccia, March

3/99 *Empirical studies of vertical integration: the transaction cost orthodoxy,* by Davide Vannoni, March

4/99 *Developing innovation in small-medium suppliers: evidence from the Italian car industry,* by Giuseppe Calabrese, April

5/99 *Privatization in Italy: an analysis of factors productivity and technical efficiency,* by Giovanni Fraquelli and Fabrizio Erbetta, March

6/99 *New Technology Based-Firms in Italia: analisi di un campione di imprese triestine,* by Anna Maria Gimigliano, April

7/99 *Trasferimento tacito della conoscenza: gli Istituti CNR dell'Area di Ricerca di Torino,* by Mario Coccia, May

8/99 *Struttura ed evoluzione di un distretto industriale piemontese: la produzione di casalinghi nel Cusio,* by Alessandra Ressico, June

9/99 *Analisi sistemica della performance nelle strutture di ricerca,* by Mario Coccia, September

10/99 *The entry mode choice of EU leading companies (1987-1997),* by Giampaolo Vitali, November

11/99 *Esperimenti di trasferimento tecnologico alle piccole e medie imprese nella Regione Piemonte,* by Mario Coccia, November

12/99 *A mathematical model for performance evaluation in the R&D laboratories: theory and application in Italy,* by Mario Coccia, November

13/99 *Trasferimento tecnologico: analisi dei fruitori,* by Mario Coccia, December

14/99 *Beyond profitability: effects of acquisitions on technical efficiency and productivity in the Italian pasta industry,* by Luigi Benfratello, December

15/99 *Determinanti ed effetti delle fusioni e acquisizioni: un'analisi sulla base delle notifiche alle autorità antitrust,* by Luigi Benfratello, December

1998

1/98 *Alcune riflessioni preliminari sul mercato degli strumenti multimediali,* by Paolo Vaglio, January

2/98 *Before and after privatization: a comparison between competitive firms,* by Giovanni Fraquelli and Paola Fabbri, January

3/98 **Not available**

4/98 *Le importazioni come incentivo alla concorrenza: l'evidenza empirica internazionale e il caso del mercato unico europeo,* by Anna Bottasso, May

5/98 *SEM and the changing structure of EU Manufacturing, 1987-1993,* by Stephen Davies, Laura Rondi and Alessandro Sembenelli, November

6/98 *The diversified firm: non formal theories versus formal models,* by Davide Vannoni, December

7/98 *Managerial discretion and investment decisions of state-owned firms: evidence from a panel of Italian companies,* by Elisabetta Bertero and Laura Rondi, December

8/98 *La valutazione della R&S in Italia: rassegna delle esperienze del C.N.R. e proposta di un approccio alternativo,* by Domiziano Boschi, December

9/98 *Multidimensional Performance in Telecommunications, Regulation and Competition: Analysing the European Major Players,* by Giovanni Fraquelli and Davide Vannoni, December

1997

1/97 *Multinationality, diversification and firm size. An empirical analysis of Europe's leading firms,* by Stephen Davies, Laura Rondi and Alessandro Sembenelli, January

2/97 *Qualità totale e organizzazione del lavoro nelle aziende sanitarie,* by Gian Franco Corio, January

3/97 *Reorganising the product and process development in Fiat Auto,* by Giuseppe Calabrese, February

4/97 *Buyer-supplier best practices in product development: evidence from car industry,* by Giuseppe Calabrese, April

5/97 *L'innovazione nei distretti industriali. Una rassegna ragionata della letteratura,* by Elena Ragazzi, April

6/97 *The impact of financing constraints on markups: theory and evidence from Italian firm level data,* by Anna Bottasso, Marzio Galeotti and Alessandro Sembenelli, April

7/97 *Capacità competitiva e evoluzione strutturale dei settori di specializzazione: il caso delle macchine per confezionamento e imballaggio,* by Secondo Rolfo, Paolo Vaglio, April

8/97 *Tecnologia e produttività delle aziende elettriche municipalizzate,* by Giovanni Fraquelli and Piercarlo Frigero, April

9/97 *La normativa nazionale e regionale per l'innovazione e la qualità nelle piccole e medie imprese: leggi, risorse, risultati e nuovi strumenti,* by Giuseppe Calabrese, June

10/97 *European integration and leading firms' entry and exit strategies,* by Steve Davies, Laura Rondi and Alessandro Sembenelli, April

11/97 *Does debt discipline state-owned firms? Evidence from a panel of Italian firms,* by Elisabetta Bertero and Laura Rondi, July

12/97 *Distretti industriali e innovazione: i limiti dei sistemi tecnologici locali,* by Secondo Rolfo and Giampaolo Vitali, July

13/97 *Costs, technology and ownership form of natural gas distribution in Italy,* by Giovanni Fraquelli and Roberto Giandrone, July

14/97 *Costs and structure of technology in the Italian water industry,* by Paola Fabbri and Giovanni Fraquelli, July

15/97 *Aspetti e misure della customer satisfaction/dissatisfaction,* by Maria Teresa Morana, July

16/97 *La qualità nei servizi pubblici: limiti della normativa UNI EN 29000 nel settore sanitario,* by Efisio Ibba, July

17/97 *Investimenti, fattori finanziari e ciclo economico,* by Laura Rondi and Alessandro Sembenelli, rivisto sett. 1998

18/97 *Strategie di crescita esterna delle imprese leader in Europa: risultati preliminari dell'utilizzo del data-base Ceris "100 top EU firms' acquisition/divestment database 1987-1993",* by Giampaolo Vitali and Marco Orecchia, December

19/97 *Struttura e attività dei Centri Servizi all'innovazione: vantaggi e limiti dell'esperienza italiana,* by Monica Cariola, December

20/97 *Il comportamento ciclico dei margini di profitto in presenza di mercati del capitale meno che perfetti: un'analisi empirica su dati di impresa in Italia,* by Anna Bottasso, December

1996

1/96 *Aspetti e misure della produttività. Un'analisi statistica su tre aziende elettriche europee,* by Donatella Cangialosi, February

2/96 *L'analisi e la valutazione della soddisfazione degli utenti interni: un'applicazione nell'ambito dei servizi sanitari,* by Maria Teresa Morana, February

3/96 *La funzione di costo nel servizio idrico. Un contributo al dibattito sul metodo normalizzato per la determinazione della tariffa del servizio idrico integrato,* by Giovanni Fraquelli and Paola Fabbri, February

4/96 *Coerenza d'impresa e diversificazione settoriale: un'applicazione alle società leaders nell'industria manifatturiera europea,* by Marco Orecchia, February

5/96 *Privatizzazioni: meccanismi di collocamento e assetti proprietari. Il caso STET,* by Paola Fabbri, February

6/96 *I nuovi scenari competitivi nell'industria delle telecomunicazioni: le principali esperienze internazionali,* by Paola Fabbri, February

7/96 *Accordi, joint-venture e investimenti diretti dell'industria italiana nella CSI: Un'analisi qualitativa,* by Chiara Monti and Giampaolo Vitali, February

8/96 *Verso la riconversione di settori utilizzatori di amianto. Risultati di un'indagine sul campo,* by Marisa Gerbi Sethi, Salvatore Marino and Maria Zittino, February

9/96 *Innovazione tecnologica e competitività internazionale: quale futuro per i distretti e le economie locali,* by Secondo Rolfo, March

10/96 *Dati disaggregati e analisi della struttura industriale: la matrice europea delle quote di mercato,* by Laura Rondi, March

11/96 *Le decisioni di entrata e di uscita: evidenze empiriche sui maggiori gruppi italiani,* by Alessandro Sembenelli and Davide Vannoni, April

12/96 *Le direttrici della diversificazione nella grande industria italiana,* by Davide Vannoni, April

13/96 *R&S cooperativa e non-cooperativa in un duopolio misto con spillovers,* by Marco Orecchia, May

14/96 *Unità di studio sulle strategie di crescita esterna delle imprese italiane*, by Giampaolo Vitali and Maria Zittino, July. **Not available**

15/96 *Uno strumento di politica per l'innovazione: la prospezione tecnologica,* by Secondo Rolfo, September

16/96 *L'introduzione della Qualità Totale in aziende ospedaliere: aspettative ed opinioni del middle management,* by Gian Franco Corio, September

17/96 *Shareholders' voting power and block transaction premia: an empirical analysis of Italian listed companies,* by Giovanna Nicodano and Alessandro Sembenelli, November

18/96 *La valutazione dell'impatto delle politiche tecnologiche: un'analisi classificatoria e una rassegna di alcune esperienze europee,* by Domiziano Boschi, November

19/96 *L'industria orafa italiana: lo sviluppo del settore punta sulle esportazioni,* by Anna Maria Gaibisso and Elena Ragazzi, November

20/96 *La centralità dell'innovazione nell'intervento pubblico nazionale e regionale in Germania,* by Secondo Rolfo, December
21/96 *Ricerca, innovazione e mercato: la nuova politica del Regno Unito,* by Secondo Rolfo, December
22/96 *Politiche per l'innovazione in Francia,* by Elena Ragazzi, December
23/96 *La relazione tra struttura finanziaria e decisioni reali delle imprese: una rassegna critica dell'evidenza empirica,* by Anna Bottasso, December

1995

1/95 *Form of ownership and financial constraints: panel data evidence on leverage and investment choices by Italian firms,* by Fabio Schiantarelli and Alessandro Sembenelli, March
2/95 *Regulation of the electric supply industry in Italy,* by Giovanni Fraquelli and Elena Ragazzi, March
3/95 *Restructuring product development and production networks: Fiat Auto,* by Giuseppe Calabrese, September
4/95 *Explaining corporate structure: the MD matrix, product differentiation and size of market,* by Stephen Davies, Laura Rondi and Alessandro Sembenelli, November
5/95 *Regulation and total productivity performance in electricity: a comparison between Italy, Germany and France,* by Giovanni Fraquelli and Davide Vannoni, December
6/95 *Strategie di crescita esterna nel sistema bancario italiano: un'analisi empirica 1987-1994,* by Stefano Olivero and Giampaolo Vitali, December
7/95 *Panel Ceris su dati di impresa: aspetti metodologici e istruzioni per l'uso,* by Diego Margon, Alessandro Sembenelli and Davide Vannoni, December

1994

1/94 *Una politica industriale per gli investimenti esteri in Italia: alcune riflessioni,* by Giampaolo Vitali, May
2/94 *Scelte cooperative in attività di ricerca e sviluppo,* by Marco Orecchia, May
3/94 *Perché le matrici intersettoriali per misurare l'integrazione verticale?,* by Davide Vannoni, July
4/94 *Fiat Auto: A simultaneous engineering experience,* by Giuseppe Calabrese, August

1993

1/93 *Spanish machine tool industry,* by Giuseppe Calabrese, November
2/93 *The machine tool industry in Japan,* by Giampaolo Vitali, November
3/93 *The UK machine tool industry,* by Alessandro Sembenelli and Paul Simpson, November
4/93 *The Italian machine tool industry,* by Secondo Rolfo, November
5/93 *Firms' financial and real responses to business cycle shocks and monetary tightening: evidence for large and small Italian companies,* by Laura Rondi, Brian Sack, Fabio Schiantarelli and Alessandro Sembenelli, December

Free copies are distributed on request to Universities, Research Institutes, researchers, students, etc.

Please, write to:

MARIA ZITTINO
Working Papers Coordinator
CERIS-CNR
Via Real Collegio, 30; 10024 Moncalieri (Torino), Italy
Tel. +39 011 6824.914; Fax +39 011 6824.966; m.zittino@ceris.cnr.it; http://www.ceris.cnr.it